RGe ISSN: 2177-3246

O PROBLEMA DO 1-CENTRO MODIFICADO EM ÁRVORES: VARIAÇÕES E APLICAÇÕES

THE MODIFIED ONE-CENTER PROBLEM IN TREES: VARIATIONS AND APPLICATIONS

EL PROBLEMA MODIFICADO DE UN CENTRO EN ÁRBOLES: VARIACIONES Y APLICACIONES

10.56238/revgeov17n5-143

Isis Paulo do Nascimento
Mestre em Modelagem Matemática
Instituição: Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
E-mail: isisnascimento@ufrrj.br
Orcid: https://orcid.org/0009-0007-3829-8956
Lattes: http://lattes.cnpq.br/0898208755952644

Carlos Andres Reyna Vera Tudela
Doutor em Engenharia Civil
Instituição: Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
E-mail: candres@ufrrj.br
Orcid: https://orcid.org/0000-0001-5855-8611
Lattes: http://lattes.cnpq.br/6509989261742578

Aquiles Braga de Queiroz
Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação
Instituição: Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
E-mail: abq@ufrrj.br
Orcid: https://orcid.org/0000-0001-7988-6075
Lattes: http://lattes.cnpq.br/4356065339264046

RESUMO
Uma variação assimétrica do problema do 1-centro em árvores e um método para sua resolução em tempo $O(n)$ são apresentados. O método emprega uma redução do problema em tempo linear, baseada em uma técnica por vértices simuladores. Por resultados computacionais obtidos, o método apresentado mostrou possuir melhor performance, com respeito a métodos clássicos para a resolução do problema do 1-centro em árvores.

Palavras-chave: Problemas de Localização. Problema do 1-Centro. Problemas Minmax.

ABSTRACT
An asymmetric variation of the 1-center problem in trees and a method for its solution in O(n) time are presented. The method employs a linear-time reduction of the problem, based on a technique using

simulated vertices. Based on the computational results obtained, the presented method showed better performance compared to classical methods for solving the 1-center problem in trees.

Keywords: Location Problems. 1-Center Problem. Minmax Problems.

RESUMEN
Se presenta una variación asimétrica del problema del centro único en árboles y un método para su solución en tiempo O(n). El método emplea una reducción en tiempo lineal del problema, basada en una técnica que utiliza vértices simulados. Según los resultados computacionales obtenidos, el método presentado mostró un mejor rendimiento en comparación con los métodos clásicos para resolver el problema del centro único en árboles.

Palabras clave: Problemas de Localización. Problema del Centro Único. Problemas Minimax.

1 INTRODUÇÃO

Problemas de localização têm sido estudados por vários autores nas últimas décadas (ver Hakimi (1965), Kariv e Hakimi (1979), Kariv e Hakimi (1979), e Tamir (1996)). O *problema da* 1-*mediana* (*vértices*) em um grafo ponderado consiste em obter um vértice no grafo que minimize a soma das distâncias ponderadas do próprio vértice a todos os outros vértices, cada um associado a um determinado peso positivo. Hakimi (1964) apresentou um estudo sobre o problema da 1-mediana, incluindo conceitos de centro absoluto, mediana absoluta e procedimentos para obter tais localizações. Como um caso especial bem resolvido, o problema de 1-mediana em árvores foi considerado pela primeira vez por Hua *et al.* (1962). Um algoritmo eficiente para este problema também é apresentado por Goldman (1971). Burkard e Krarup (1998) apresentaram um método para a resolução do problema da 1-mediana em cactos (ou seja, grafos em que cada bloco é um ciclo simples ou uma única aresta) quando pesos negativos são permitidos.

O *problema da p-mediana em vértices* em um grafo é o problema de identificar um subconjunto X de p vértices que minimize a soma das distâncias ponderadas de todos os outros vértices no grafo até o vértice mais próximo em X. Por Kariv e Hakimi (1979), o problema da p-mediana em um grafo é NP-Difícil. O problema permanece NP-Difícil mesmo quando restrito a grafos planares com grau máximo igual a 3. Contudo, Kariv e Hakimi (1979) apresentaram resultados que levaram a algoritmos eficientes quando o grafo é uma árvore, incluindo um algoritmo que encontra a p-mediana de uma árvore (para $p > 1$) em tempo $O(n^2p^2)$. Tamir (1996) apresentou um algoritmo de tempo $O(pn^2)$ para o problema, e Daskin e Maass (2015) apresentaram alguns resultados existentes na literatura para o problema clássico.

O *problema do* 1-*centro em vértice*s pode ser definido da seguinte forma: dado um conjunto de n vértices de demanda, um espaço de locais viáveis para um serviço e uma função para calcular o custo de transporte entre um serviço e qualquer vértice de demanda, encontrar uma localização para o serviço que minimize o custo máximo de transporte do serviço até o vértice de demanda. O problema do 1-centro ponderado absoluto foi definido e resolvido por Hakimi (1964). Para o *problema do* 1-*centro absoluto*, é possível que sua solução esteja em um vértice do grafo ou em um ponto interior de uma aresta (diferente dos vértices de extremidade de tal aresta). Hakimi *et al.* (1978) mostraram que o método em Hakimi (1964) pode ser implementado em tempo $O(|E|n^2 \log n)$. Refinamentos adicionais do procedimento foram obtidos por Kariv e Hakimi (1979), resultando em um algoritmo de tempo $O(|E|n \log n)$ para o caso ponderado e em um algoritmo de tempo $O(|E|n)$ para o caso não ponderado. Um algoritmo para obter o centro 1-absoluto de uma árvore também é apresentado por Dearing e Francis (1974), Kariv e Hakimi (1979) e Megiddo (1983).

No *problema do p-centro em vértices*, é necessário encontrar um conjunto X de p vértices no grafo tal que $\max_{j = 1,\ldots, n} w_j.d(X, v_j)$ seja minimizado, onde w_j é o peso de v_j no grafo. Analogamente

ao problema da p-mediana (vértices), dado um conjunto $X = x_1, \ldots, x_p$ de p vértices em um grafo, a distância $d(X, v_j)$ entre X e um vértice v_j é calculada como $\min_{i=1,\ldots,p} d(x_i, v_j)$. O problema do p-centro foi formulado por Hakimi (1965). Kariv e Hakimi (1979) mostraram que o problema para grafos gerais é NP-Difícil. Além disso, eles descrevem um algoritmo de tempo $O(n^2 \log n)$ para a obtenção do p-centro absoluto de uma árvore ponderada em vértices. Tansel *et al.* (1983) apresentaram um estudo sobre os problemas da p-mediana e do p-centro. Wang e Zhang (2021) apresentam um algoritmo de tempo $O(n \log n)$ para o problema do p-centro em árvores.

Algumas variações de problemas de localização são apresentadas por Gørtz e Wirth (2006), Nguyen *et al.* (2019) e Çalik *et al.* (2015). Gørtz e Wirth (2006) apresentam variações do problema do p-centro e um algoritmo de aproximação para a versão assimétrica do problema. No *problema do 1-centro inverso* em um grafo, devemos modificar os comprimentos das arestas ou pesos dos vértices dentro de certos limites, de modo que o vértice pré-especificado se torne um 1-centro do grafo perturbado e o custo de modificação seja minimizado. Nguyen *et al.* (2019) apresentam um estudo sobre o problema do 1-centro inverso em uma árvore ponderada com custo de modificação de comprimento de aresta uniforme.

O problema de alocação de equipamentos é um problema de otimizacão que envolve decidir como alocar recursos limitados de maneira a atender a determinadas demandas de maneira ótima. Isso pode incluir minimizar o custo total, maximizar a eficiência ou equilibrar ambos. Existem inúmeras técnicas que podem ser usadas para a resolucão deste tipo de problema, incluindo programacão linear, algoritmos genéticos e heurísticas. Neste trabalho, apresentamos o problema do 1-centro modificado, aplicado ao redimensionamento de uma rede de energia em árvores, assim como dois algoritmos, de tempos $O(n \log n)$ e $O(n)$, para sua solucão, nos quais consideramos pesos e distâncias positivas. O trabalho inclui um primeiro estudo do problema para a classe geral de grafos e resultados computacionais obtidos na implementacão do método.

1.1 O PROBLEMA DO 1-CENTRO MODIFICADO EM ÁRVORES

Seja $T = (V, E)$ uma árvore ponderada, com uma função peso $k(v_i)$ associando a cada vértice $v_i \in V$ um real positivo, e uma função distância $d(e_m)$ associando a cada aresta $e_m \in E$ um real positivo. Para uma aresta $e_m = (v_i, v_j)$ em T, denote por $d(e_m) = d(v_i, v_j)$ a distância entre v_i e v_j em T. A função peso k pode ser estendida a um subconjunto $V' \subseteq V$ como a soma dos pesos dos vértices em V', ou seja, $k(V') = \sum_{v_i \in V'} k(v_i)$.

Seja $T' = (V', E')$ uma subárvore de $T = (V, E)$. Denote por $k(T') = k(V')$ o peso da subárvore T'. Para uma aresta (v_i, v_j) de $T = (V, E)$, seja $T(v_i)$ a árvore T enraizada em v_i e seja $T(v_i, v_j)$ a subárvore de $T(v_i)$ enraizada em v_j .

Considerando o redimensionamento de redes de energia como um problema motivador, seja uma rede de energia secundária (ou rede de energia local) dada por uma árvore ponderada $T = (V, E)$. Considere uma fonte fixa de energia t a ser implantada em um vértice da árvore, denominada *transformador*. O *problema do* 1-*centro modificado* é o problema de definir a localização na árvore T de um transformador que minimize a queda de tensão máxima na rede. Como uma observação, o comprimento de um condutor elétrico possui forte influência na queda de tensão resultante do aumento da resistência elétrica.

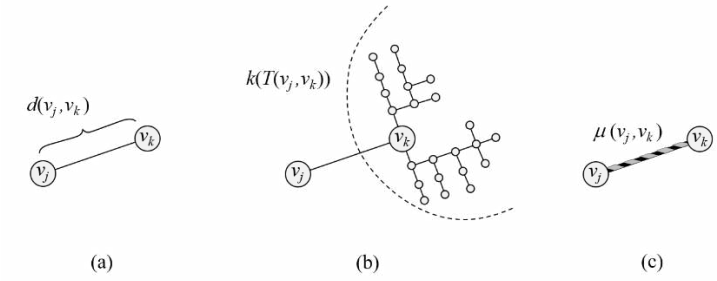
Dada a rede em árvore $T = (V, E)$, se o transformador estiver instalado em um vértice $v_i \in V(T)$, para a definição da localização, pode-se calcular a queda de tensão total para cada vértice $v_j \in V(T)$, $v_j \neq v_i$. A queda de tensão total de v_i para um vértice v_j é definida como a soma das quedas de tensão que ocorrem em cada uma das arestas ao longo do único caminho de v_i para v_j em T. Para a definição da queda de tensão em uma aresta qualquer $(v_j, v_k) \in E(T)$, considera-se o peso $k(v_i)$ como a demanda de energia no vértice $v_i \in V(T(v_j, v_k))$. Defina a queda de tensão em uma aresta $(v_j, v_k) \in E(T)$, denotada por $q(v_j, v_k)$, por

$$q(v_j, v_k) = \frac{d(v_j, v_k) * k(T(v_j, v_k)) * \mu(v_j, v_k)}{100}, \qquad (1)$$

Onde:

- $d(v_j, v_k)$ = distância de v_j a v_k ,
- $k\,(T\,(v_j, v_k))$ = peso da subárvore $T\,(v_j, v_k)$, ou *demanda acumulada* de $T\,(v_j, v_k)$,
- $m\,(v_j, v_k)$ = constante do material condutor utilizado na seção entre v_j e v_k (ver Figura 1).

Figura 1 – Definição do cálculo de queda de tensão. (a) Distância $d(v_j, v_k)$; (b) Demanda acumulada; (c) Constante do material utilizado.



Fonte: Autores.

Observe que, para uma aresta $(v_j, v_k) \in E(T)$, tem-se $d(v_j, v_k) = d(v_k, v_j)$ e $\mu(v_j, v_k) = \mu(v_k, v_j)$. Contudo, não necessariamente $k\,(T\,(v_j, v_k)) = k\,(T\,(v_k, v_j))$, *i.e.* o problema considera valores de arestas

assimétricos. Seja $P(v_i, v_j) = (v_i, u_1, u_2, \ldots, u_k, v_j)$ o caminho em T do vértice v_i onde o transformador está localizado até qualquer vértice v_j em T. Defina a queda de tensão total entre v_i e v_j por

$$Q(v_i, v_j) = q(v_i, u_1) + q(u_1, u_2) + \ldots + q(u_k, v_j) = \sum_{(u, v) \in P(v_i, v_j)} q(u, v). \quad (2)$$

Ou seja, $Q(v_i, v_j)$ é a soma das quedas de tensão ocorridas ao longo do caminho $P(v_i, v_j)$. Para $v_i \in V(T)$, seja

$$\Phi(v_i) = \max_{v_k \in V(G)} \{ Q(v_i, v_k) \} \quad (3)$$

a *queda de tensão total máxima* a partir de v_i, ou a queda de tensão total máxima considerando-se um transformador em v_i. Seja $v^* \in V(T)$ um vértice que minimiza esta queda de tensão total máxima.

$$\Phi(v^*) = \min_{v \in V(G)} \{ \Phi(v) \}. \quad (4)$$

Analogamente à terminologia usada por Kariv e Hakimi (1979), o vértice v^* é definido como o 1-*centro modificado* de T e $\Phi(v^*)$ como o 1-*raio modificado* de T, denotado por r_1.

2 METODOLOGIA

Objetivando exclusivamente estabelecer-se a polinomialidade do problema, um método imediato para a obtenção do 1-centro modificado de uma árvore consistiria em aplicar-se uma busca em profundidade a cada vértice $v_i \in V(T)$. A busca em profundidade enraizada em v_i calcula as quedas de tensão que ocorrem nas arestas de cada caminho raiz-folha da árvore DFS (Depth-First Search) e, em seguida, calcula a queda de tensão total em cada folha da árvore DFS enraizada em v_i. Considerando que o cálculo das demandas acumuladas de cada subárvore pode exigir tempo $O(n)$, o método utiliza um pré-processamento em tempo $O(n)$ para o cálculo de todas as demandas acumuladas das subárvores em T. Esta etapa de pré-processamento procede de forma similar ao algoritmo de Hua (1962), iniciando a definição dos pesos das subárvores a partir das folhas, para os nós internos de T. Ao término, o 1-centro modificado de T é o vértice v_i com a menor queda de tensão total máxima. Com a aplicação de buscas em profundidade em T, esta abordagem imediata requer tempo $O(n^2)$.

Seja T uma árvore instância do problema do 1-centro modificado, com pesos de vértices e distâncias de arestas estritamente positivos. Seja $v \in V(T)$ um vértice com grau d_v. Seja $T - v$ o grafo obtido de T pela remoção do vértice v. Seguindo a notação em (Kariv e Hakimi, 1979),

$T - v$ consiste em d_v subárvores $T_{v,1}, T_{v,2}, \ldots, T_{v,}$. Denote por $T_{v,i}$ a subárvore que consiste em $T_{v,i}$, o vértice v e a aresta que conecta v a $T_{v,i}$. Com base nos resultados apresentados por Kariv e Hakimi (1979), tem-se o seguinte lema como extensão de tais resultados.

Lema 1. *Seja $v \in V(T)$ um vértice fixo e seja v um vértice tal que a queda de tensão total é máxima a partir de v, isto é, $Q(v, v) = \max_{v' \in V(T)} Q(v, v')$. Seja $T_{v,l}$ a subárvore de $T - v$ que contém v. Então, o 1-centro modificado de T está em $T_{v,l}$.*

Prova. Suponha que o centro 1-modificado v^* de T não esteja em $T_{v,l}$. Então $Q(v^*, v) > Q(v, v)$, dado que todas as demandas e distâncias são positivas em T. Assim, se r_1 é o 1-raio modificado de T, então $r_1 \geq Q(v^*, v) > Q(v, v) = \max_{v' \in V} Q(v^*, v')$. Desta maneira, por um argumento análogo ao apresentado em Kariv e Hakimi (1979), v como 1-centro modificado de T é uma escolha melhor do que v^*, o que é uma contradição. □

O lema conduz ao seguinte corolário.

Corolário 2. Sejam v e v dois vértices tais que $v \in T_{v,l}$, $v \in T_{v,k}$, $k \neq l$, e $Q(v, v) = Q(v, v) = \max_{v' \in V} Q(v, v')$. Então v é o 1-centro modificado de T.

Analogamente a uma observação sobre o problema do 1-centro clássico, se o vértice v no Lema 1 não é uma folha de T, então $T_{v,l}$ é uma subárvore própria de T. Uma estratégia devida a Kariv e Hakimi para o problema do 1-centro pode ser utilizada para o problema do 1-centro modificado, visando um algoritmo de tempo $O(n \log n)$.

Definição 1. Seja $v \in V(T)$, e sejam $T_{v,1}, T_{v,2}, \ldots, T_{v,}$ as subárvores de $T - v$. Seja $|T|$ o número de vértices em T e defina $N(v)$ por

$$N(v) = \max_{1 \leq i \leq d_v} \{|T_{v,i}|\}.$$

Por Kariv e Hakimi (1979), um centróide de T é um vértice $v_c \in V(T)$ para o qual $N(v)$ é mínimo, *i.e.*

$$N(v_c) = \min_{v \in V(T)} \{|N(v)|\}.$$

Uma árvore pode ter um centróide ou dois. Neste último caso, os dois centróides estão conectados por uma aresta. Além disso, tem-se que $N(v_c) \leq \lfloor n/2 \rfloor$, isto é, o número de vértices em cada uma das subárvores $T_{v_c,1}, T_{v_c,2}, \ldots, T_{v_c,d}$ não é maior do que $\lfloor n/2 \rfloor + 1$.

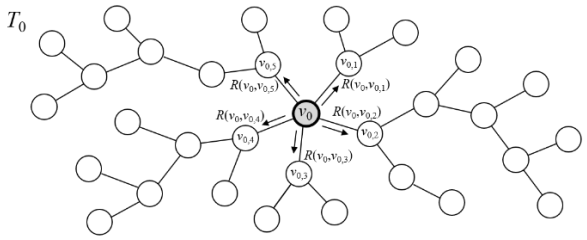
Pelo Lema 1, se a queda de tensão total máxima ocorre em $T_{v,j}$, então esta subárvore contém o 1-centro modificado de T. Desta forma, a cada passo o algoritmo pode escolher um centróide v_i de T_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$), de modo que $|T_{i+1}| \leq \lfloor |T_i|/2 \rfloor + 1$, e o número de iterações será no máximo $O(\log n)$. De acordo com Kariv e Hakimi (1979), a desigualdade $N(v_c) \leq \lfloor n/2 \rfloor$ é uma condição necessária e

suficiente para que um vértice v_c seja um centróide de T. Assim, pode-se utilizar a cada iteração uma versão do algoritmo de Goldman (1971) para a obtenção do centróide de uma árvore em tempo $O(n)$. Consequentemente, o 1-centro modificado de uma árvore T pode ser encontrado em tempo $O(n \log n)$.

3 ALGORITMO DE TEMPO $O(n)$

Megiddo (1983) apresentou um algoritmo para o problema do 1-centro em uma árvore T no qual $n/8$ vértices de T são removidos a cada iteração, dando origem à recorrência $tempo\ (n) \leq tempo\ (7n/8) + Cn$. Com a resolução desta recorrência, o tempo necessário para a obtenção do 1-centro em uma árvore com n vértices é dado por $tempo\ (n) = O(n)$. Para o problema do 1-centro modificado em árvores, uma estratégia de remoção de vértices também pode ser usada para a obtenção de um algoritmo de tempo linear. No entanto, para o problema do 1-centro modificado, tal estratégia pode levar a uma melhor convergência.

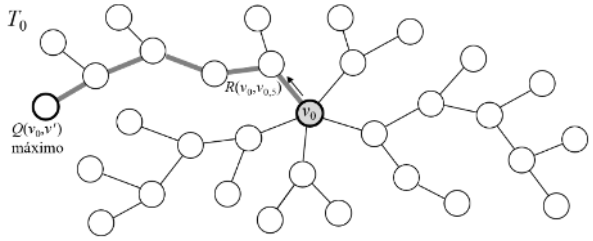
Figura 2 – Árvore $T = T_0$ e os valores de queda de tensão total máxima $R(v_0, v_{0,1}), \ldots, R(v_0, v_{0,d})$ a partir de v_0 nas subárvores $T^+_{v_0,v_{0,1}}, \ldots, T^+_{v_0,v_{0,d}}$.



Fonte: Autores.

Seja $T = T_0$ uma árvore instância do problema do 1-centro modificado com n vértices. Seja v_0 o centróide de T_0. A partir de v_0, na busca pela subárvore que possui o 1-centro modificado, é necessário verificar-se qual subárvore corresponde à queda de tensão total máxima, ou seja, qual subárvore corresponde ao valor máximo de $Q(v_0, v_k)$. Sejam $v_{0,1}, \ldots, v_{0,d}$ os vizinhos de v_0 em T_0, e sejam $R(v_0, v_{0,1}), \ldots, R(v_0, v_{0,d})$ os valores das quedas máximas de tensão total em $T_{v_0,v_{0,1}}, \ldots, T_{v_0,v_{0,d}}$, ou seja, os valores das perdas máximas de v_0 nas direções de $v_{0,1}, \ldots, v_{0,d}$, respectivamente (ver Figura 2). Seja $R(v_0, v_{0,k}) = \max_{1 \leq i \leq d} R(v_0, v_{0,i})$. A Figura 3 mostra um exemplo com $k = 5$ para a árvore $T = T_0$.

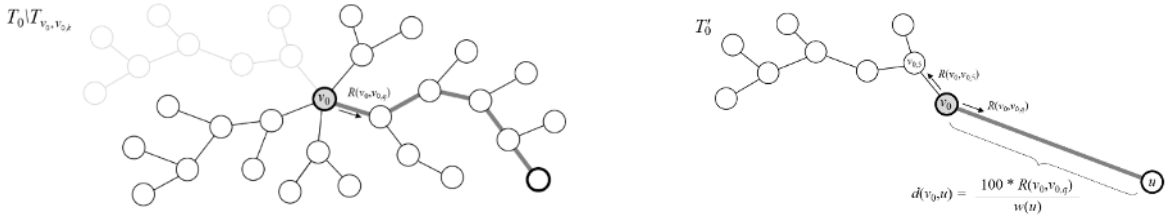
Figura 3 – Valor de queda de tensão total máxima $R(v_0, v_{0,5})$ a partir de v_0 na subárvore $T^+_{v_0,v_{0,5}}$.



Fonte: Autores.

Seja $R(v_0, v_{0,q}) = \max_{1 \le i \le d,\, i \ne k} \{R(v_0, v_{0,i})\}$. Isto é, $R(v_0, v_{0,q})$ corresponde à perda máxima a partir de v_0 na subárvore $T_0 \setminus T_{v,v}$ (ver Figura 4(a)).

Figura 4 – (a) Valor de $R(v_0, v_{0,5})$ a partir de v_0 em $T_{v_0,v_{0,q}}$; (b) Árvore T_0.



(a) (b)

Fonte: Autores.

Se $R(v_0, v_{0,k}) = R(v_0, v_{0,q})$ então, pelo Corolário 2, v_0 é o 1-centro modificado de T_0. Caso contrário, seja T' a árvore obtida de $T_{v,v}$ pela inclusão de um vértice simulador u, adjacente a v_0 (ver Figura 4(b)). Na árvore T_0, seja

- $w(u) = \sum_{v \in T_0 \setminus T^+_{v_0, v_{0,k}}} w(v)$, a soma dos pesos dos vértices removidos de T_0 para a definição de T'_0 (ver Figura 5),
- $d(v_0, u) = \frac{100 * R(v_0, v_{0,q})}{w(u)}$ (ver Figura 4(b)), e
- $\mu(v_0, u) = 1$.

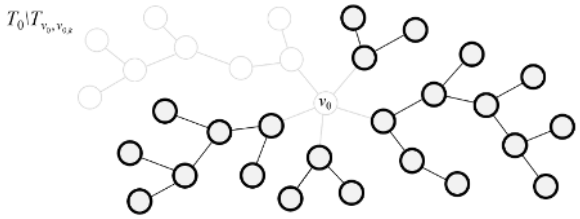
Seja T_0 uma árvore com $|V(T_0)| \ge 4$. Os resultados a seguir estabelecem uma redução para o problema do 1-centro modificado em árvores.

Lema 3. *Seja T_0 uma árvore com pesos, distâncias e constantes estritamente positivos. Então, em T_0, a queda de tensão total máxima a partir de u é maior do que a queda de tensão total máxima a partir de v_0.*

Prova. Em T_0, a queda de tensão total máxima a partir de v_0 é dada por $R(v_0, v_{0,k})$, e a queda de tensão total máxima a partir de u é dada por $R(v_0, v_{0,k}) + [100 * R(v_0, v_{0,q})/w(u)] * w(T_0 - u)/100 = R(v_0, v_{0,k}) + [R(v_0, v_{0,q}) * w(T_0 - u) / w(u)] > R(v_0, v_{0,k})$.

Desta forma, o vértice simulador u não pode ser o 1-centro modificado da árvore T_0. Além disso, todo vértice simulador u em T_i (para $i = 0, 1, ...$) é uma folha de T_i e, por construção, foi originado pela remoção de uma subárvore que não continha um vértice que minimizasse a queda de tensão total máxima.

Figura 5 – Vértices removidos de T_0.



Fonte: Autores.

Se v_i é um centróide de T_i, com $|V(T_i)| > 4$, então v_i não pode ser vizinho de dois vértices simuladores em T_i. Se $|V(T_i)| = 3$, então $|V(T_i)| = 3$. Se $|V(T_i)| = 4$, então $3 \leq |V(T_i)| \leq 4$. Desta forma, um possível critério de parada para o algoritmo pode ser dado por $|V(T_i)| \leq 4$.

Lema 4. *Um vértice v em T_0 é o 1-centro modificado de T_0 se e somente se v é o 1-centro modificado de T_0.*

Prova. Pela definição dos valores para $w(u)$, $d(v_0, u)$ e $\mu(v_0, u)$, a queda de tensão total máxima de qualquer vértice v diferente de u é a mesma em T_0 e em T_0.

Lema 5. *Seja T_0 uma árvore de ordem n. Então T_0 possui ordem no máximo $\lfloor n/2 \rfloor + 2$.*

Prova. Este lema segue da construção da árvore T_0 a partir de T_0 e da definição de centróide.

O algoritmo 1-Centro-Modificado (T) determina o 1-centro modificado da árvore T e é baseado nos Lemas 1, 3, 4, 5 e no Corolário 2. Pelo Lema 5, temos uma redução do problema, de uma instância de tamanho n para uma instância de tamanho menor ou igual a $\lfloor n/2 \rfloor + 2$. Assim, o tempo requerido pelo método é dado pela seguinte recorrência.

$$S(n) \leq S(\lfloor n/2 \rfloor + 2) + Cn. \quad (5)$$

Teorema 6. *Seja T uma árvore ponderada com n vértices, com distâncias positivas, pesos positivos e constantes positivas. O Algoritmo 1 calcula o 1-centro modificado de T em tempo $O(n)$.*

Como observação, o Teorema 6 segue da resolução da recorrência (5).

Algoritmo 1 1-Centro-Modificado (T)

1: $T' \leftarrow T$
2: **enquanto** $|\, V(T') \,| > 4$ **faça**
3: $v_c \leftarrow$ Centroide (T');
4: seja $v \in T'$ tal que $Q(v_c, v) = \max_{v' \in V(T')} Q(v_c, v')$;
5: $T''' \leftarrow$ componente de $T' - v_c$ que contem v;
6: $T'' \leftarrow T''' + v_c + u + (v_c, u) + (v_c, v_j)$ a aresta que conecta v_c a T''';
7: $w(u) \leftarrow \sum_{v \in T_0 \setminus (T_{v_0, v_{0,k}})} w(v)$;
8: $d(v_c, u) \leftarrow 100 * R(v_0, v_{0,q})/w(u)$;
9: $\mu(v_c, u) \leftarrow 1$;
10: **se** existe um vértice folha $\bar{v}$ tal que $\bar{v} \in T''$ **e** $Q(v_c, v) = Q(v_c, v)$ **então**
11: **retorne** v_c;
12: **fim se**
13: $T' \leftarrow T''$;
14: **fim enquanto**
15: **retorne** o vértice v com a menor perda máxima, dentre os vértices em $V(T')$, com $|\, V(T') \,| \leq 4$;

4 RESULTADOS

Problemas de localização possuem aplicações que incluem a cobertura de uma determinada região com localização de hospitais, torres de telefonia móvel, instalação de sirenes de alerta e depósitos de baterias em redes de distribuição por drones, dentre outras (ver Liu (2019)). Nesta seção é apresentada uma primeira avaliação do desempenho computacional de alguns dos métodos desenvolvidos para a resolução do problema do 1-centro modificado em árvores.

O desenvolvimento em C++ incluiu a implementação de classes para a representação de instâncias em espaço $O(n)$, a implementação do método de cálculo do Centróide em tempo $O(n)$ e do 1-Centro-Modificado em tempo $O(n^2)$, $O(n \log n)$ e $O(n)$. (Experimentos foram realizados com a utilização de uma CPU Intel(R) Core(TM) i7 - 9750H a 2,60 GHz, 16,0 GB de RAM - Windows 11.)

A avaliação incluiu a criação de instâncias com 7, 10, 13, 16, ... e 37 vértices, bem como uma comparação de desempenho entre os métodos. Para o conjunto de instâncias geradas, com a representação de pesos de vértices e arestas, demandas acumuladas, quedas de tensão e constantes de condutividade elétrica em precisão simples, o método para o 1-centro modificado em tempo

$O(n \log n)$ representou uma melhoria de 18,92 % em média, no tempo de execução (em operações elementares) em comparação com a abordagem de tempo quadrático.

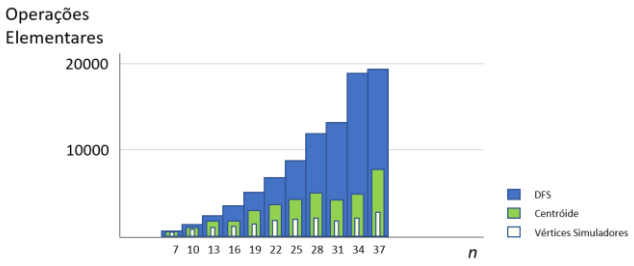
Para o conjunto de instâncias geradas, a Tabela 1 abaixo apresenta o número de operações elementares em cada um dos métodos e a Figura 6 apresenta o desempenho dos métodos. Como observação, o método 1-Centro-Modificado, de tempo $O(n)$, mostrou-se significativamente mais rápido do que a estratégia de tempo $O(n \log n)$, representando uma melhoria de 64% no número de operações elementares, para determinadas instâncias. Em cada iteração do método 1-Centro-Modificado, a remoção de $n'/2 - 2$ vértices da árvore corrente T' com n' vértices dá origem a uma nova árvore de ordem menor, e o tempo requerido é dado pela recorrência $S(n) \leq S(\ (n/2) + 2\ ) + Cn$. Com o conjunto de remoções efetuadas em uma aplicação do método apresentado por Megiddo (1983) para o problema clássico, o tempo requerido é dado pela recorrência $S(n) \leq S(7n/8) + Cn$. Considerando como exemplo $C = 30$ e $S(n) = 118$ (para $n \leq 4$), os valores para as recorrências são apresentados na Tabela 2 e podem indicar uma extrema eficiência do método linear apresentado, com respeito às demais implementações em tempo polinomial.

Tabela 1 - Operações elementares.

Métodos	$n = 7$	$n = 10$	$n = 13$	$n = 16$	$n = 19$	$n = 22$	$n = 25$	$n = 28$	$n = 31$	$n = 34$	$n = 37$
$O(n^2)$	647	1378	2341	3552	5125	6809	8723	11906	13147	16169	19291
$O(n \lg n)$	641	987	1816	1735	2979	3638	4294	5065	4214	4881	7712
$O(n)$	478	848	1031	1113	1394	1804	1941	2082	1799	2143	2742

Fonte: Autores.

Figura 6 – Performance dos métodos $O(n^2)$, $O(n \log n)$ e $O(n)$ para o problema do 1-centro modificado em instâncias com $n = 7, 10, \ldots, 37$.



Fonte: Autores.

Tabela 2 – Recorrências dos métodos.

Recorrências	$n = 7$	$n = 10$	$n = 13$	$n = 16$	$n = 19$	$n = 22$	$n = 25$	$n = 28$	$n = 31$	$n = 34$	$n = 37$
$S(n) = S(7n/8) + Cn$	658	1198	1648	2458	3028	3688	4018	4828	4214	5518	6898
$S(n) = S(n/2 + 2) + Cn$	478	778	1078	1258	1378	1738	1888	2098	2218	2398	2758

Fonte: Autores.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, uma variação assimétrica do problema do 1-centro em árvores é apresentada, assim como um método para sua resolução em tempo $O(n)$. A estratégia pode ser estendida a variações do problema em que as funções preservem independência por arestas, possibilitando a substituição de subárvores inteiras por vértices simuladores. Considerando os resultados computacionais obtidos, assim como o estudo comparativo das recorrências, o método linear apresentou excelente desempenho com respeito às demais implementações em tempo polinomial.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), e ao Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional (PPGMMC) da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ) pelo suporte financeiro.

REFERÊNCIAS

Burkard, R.; Krarup, J. A linear algorithm for the pos/neg-weighted 1-median problem on a cactus. *Computing* 60(3), 193–216. 1998.

Çalık, H.; Labbé, M.; Yaman, H. *p*-center problems. *Location Science*, 79–92. 2015.

Daskin, M.S.; Maass, K.L. "The *p*-Median Problem". In: Laporte, G., Nickel, S., Saldanha da Gama, F. (eds.) *Location Science*, pp. 21–45. Springer. 2015.

Dearing, P.M.; Francis, R.L. A minimax location problem on a network. *Transportation Science* 8(4), 333–343. 1974.

Goldman, A.J. Optimal center location in simple networks. *Transportation Science* 5(2), 212–221. 1971.

Gortz, I.L.; Wirth, A. Asymmetry in *k*-center variants. *Theoretical Computer Science* 361(2), 188–199. 2006.

Hakimi, S.L. Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph. *Operations Research* 12(3), 450–459. 1964.

Hakimi, S.L. Optimum distribution of switching centers in a communication network and some related graph-theoretic problems. *Operations Research* 13(3), 462–475. 1965.

Hakimi, S.L.; Schmeichel, E.F.; Pierce, J.G. On *p*-centers in networks. *Transportation Science* 12(1), 1–15. 1978.

Hua, L.-K. *et al.* Application of mathematical methods to wheat harvesting. *Chinese Mathematics* 2(7791), 8. 1962.

Kariv, O.; Hakimi, S.L. An algorithmic approach to network location problems. I: The *p*-centers. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 37(3), 513–538. 1979.

Kariv, O.; Hakimi, S.L. An algorithmic approach to network location problems. II: The *p*-medians. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 37(3), 539–560. 1979.

Liu, Y. An optimization-driven dynamic vehicle routing algorithm for on-demand meal delivery using drones. *Computers & Operations Research* 111(1), 1–20. 2019.

Megiddo, N. Linear-time algorithms for linear programming in R^3 and related problems. *SIAM J. Comput*. 12(4), 759–776. 1983.

Nguyen, K.T.; Nguyen-Thu, H.; Hung, N.T. Combinatorial algorithms for the uniformcost inverse 1-center problem on weighted trees. *Acta Math. Vietnam* 44(3), 813–831. 2019.

Tamir, A. An $O(pn^2)$ algorithm for the *p*-median and related problems on tree graphs. *Operations Research Letters* 19(2), 59–64. 1996.

Tansel, B.; Francis, R.L.; Lowe, T.J. Location on networks: A survey. Part I: The *p*-center and *p*-median problems. *Management Science* 29(2), 482–497. 1983.

Wang, H.; Zhang, J. An $O(n \log n)$-time algorithm for the k-center problem in trees. *SIAM J. Comput.* 50(2), 602–635. 2021.