ReGeo ISSN: 2177-3246

CONTROLE ROBUSTO INTELIGENTE VIA LMIs PARA QUADRICÓPTEROS QUASE-LPV COM SATURAÇÃO DE ATUADORES: UMA METODOLOGIA BASEADA EM SISTEMAS DE LUR'E E REDES NEURAIS MLP

INTELLIGENT ROBUST CONTROL VIA LMIs FOR QUASI-LPV QUADROTORS WITH ACTUATOR SATURATION: A METHODOLOGY BASED ON LUR'E SYSTEMS AND MLP NEURAL NETWORKS

CONTOL ROBUSTO INTELIGENTE MEDIANTE LMIs PARA QUADRICÓPETROS CUASI-LPV COM SATURACIÓN DE ACTUADORES: UNA METODOLOGIA BASADA EN SISTEMAS DE LUR'E Y REDES NEURALES MLP

https://doi.org/10.56238/revgeov17n10-154

Data de submissão: 23/09/2026 **Data de publicação:** 23/10/2026

Ivanildo Silva Abreu
Pós-Doutorado em automação e controle
Instituição: Escola de Engenharia de São Carlos (EESC) da Universidade de São Paulo (USP), Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)
E-mail: ivanildoabreu@yahoo.com.br

Jean Robert Pereira Rodrigues
Doutor em Engenharia Mecânica
Instituição: Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)
E-mail: jroberth@gmail.com

Maciel dos Santos Silva
Mestre em Matemática - PROFMAT
Instituição: Universidade Federal do Piauí
E-mail: macieleu@hotmail.com

Adson Pinto Nunes
Mestrando em Matemática PROFMAT
Instituição: Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)
E-mail: adsonnunes@hotmail.com

Isaias dos Santos Penha
Mestrando em Matemática PROFMAT
Instituição: Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)
E-mail: Isaias.penha18@gmail.com

Gustavo Santos Pereira
Mestrando em Matemática PROFMAT
Instituição: Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)
E-mail: Gustavosantos.rh@gmail.com

ReGeo

ISSN: 2177-3246

Mayra Sherle Oliveira da Silva
Mestrando em Matemática PROFMAT
Instituição: Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)
E-mail: mayrasherle@gmail.com

Samuel Mendes Moraes
Mestrando em Matemática PROFMAT
Instituição: Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)
E-mail: smendesm@yahoo.com.br

Carlos Miranda Junior
Mestrando em Matemática PROFMAT
Instituição: Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)
E-mail: Mirandajuniort01@gmail.com

RESUMO

Este trabalho apresenta uma metodologia integrada de controle robusto inteligente via Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) para quadricópteros Quase-LPV sujeitos a incertezas paramétricas, perturbações externas e saturação dos atuadores. A dinâmica rotacional é descrita por uma representação Quase-LPV politópica, permitindo formular condições de estabilidade e desempenho nos vértices do domínio de operação. A síntese do controlador combina função de Lyapunov, desempenho $H\infty$, Lema Real Limitado, representação da saturação por sistemas de Lur'e, condições setoriais, S-Procedure e Complemento de Schur. Mediante mudanças de variáveis, o problema é convertido em LMIs e resolvido por otimização semidefinida. Como camada complementar de supervisão inteligente, uma rede neural Perceptron Multicamadas (MLP) classifica os regimes operacionais a partir de características extraídas das simulações em malha fechada, sem substituir as garantias analíticas do controlador. A solução numérica forneceu γ^*=19,9876 matriz de Lyapunov positiva definida, com λ_{min}=0,0882, e autovalores de malha fechada com parte real máxima igual a -0,9294, verificando as condições de estabilidade no domínio politópico considerado. A avaliação em frequência resultou em $\|T_{wz}\|_\infty$=0,2387. Para a etapa inteligente, a arquitetura MLP com camadas ocultas [24,12] apresentou, no conjunto independente de teste, acurácia de 65,78% e Macro-F_1 de 65,80%. Os resultados evidenciam a viabilidade da integração entre síntese robusta baseada em LMIs, tratamento explícito da saturação e classificação neural, preservando a separação entre as garantias formais de estabilidade e a função supervisória da MLP. As garantias associadas à saturação são válidas na região definida pelas condições setoriais adotadas.

Palavras-chave: Controle Robusto. Sistemas Quase-LPV. Desigualdades Matriciais Lineares. Quadricópteros. Redes Neurais MLP.

ABSTRACT

This work presents an integrated methodology for intelligent robust control via Linear Matrix Inequalities (LMIs) for Quasi-LPV quadcopters subject to parametric uncertainties, external disturbances, and actuator saturation. The rotational dynamics are described by a polytopic Quasi-LPV representation, allowing the formulation of stability and performance conditions at the vertices of the operating domain. The controller synthesis combines Lyapunov function, H∞ performance, Bounded Real Lemma, saturation representation by Lur'e systems, sectoral conditions, S-Procedure, and Schur Complement. By changing variables, the problem is converted into LMIs and solved by semidefinite optimization. As a complementary layer of intelligent supervision, a Multilayer Perceptron (MLP) neural network classifies the operating regimes based on features extracted from closed-loop

simulations, without replacing the analytical guarantees of the controller. The numerical solution yielded a positive definite Lyapunov matrix γ^*=19.9876, with λ_min=0.0882, and closed-loop eigenvalues with a maximum real part equal to -0.9294, verifying the stability conditions in the considered polytopic domain. Frequency evaluation resulted in ‖T_wz ‖_∞=0.2387. For the intelligent stage, the MLP architecture with hidden layers [24,12] presented, in the independent test set, an accuracy of 65.78% and Macro-F_1 of 65.80%. The results demonstrate the feasibility of integrating robust synthesis based on LMIs, explicit saturation handling, and neural classification, preserving the separation between formal stability guarantees and the supervisory function of the MLP. The guarantees associated with saturation are valid in the region defined by the adopted sectoral conditions.

Keywords: Robust Control. Quasi-LPV Systems. Linear Matrix Inequalities. Quadcopters. MLP Neural Networks.

RESUMEN

Este trabajo presenta una metodología integrada para el control robusto inteligente mediante desigualdades matriciales lineales (LMI) para cuadricópteros Quasi-LPV sujetos a incertidumbres paramétricas, perturbaciones externas y saturación de actuadores. La dinámica rotacional se describe mediante una representación Quasi-LPV politópica, lo que permite formular condiciones de estabilidad y rendimiento en los vértices del dominio operativo. La síntesis del controlador combina la función de Lyapunov, el rendimiento H∞, el lema de los reales acotados, la representación de la saturación mediante sistemas de Lur'e, condiciones sectoriales, el procedimiento S y el complemento de Schur. Al cambiar las variables, el problema se transforma en LMI y se resuelve mediante optimización semidefinida. Como capa complementaria de supervisión inteligente, una red neuronal de perceptrón multicapa (MLP) clasifica los regímenes operativos basándose en características extraídas de simulaciones en lazo cerrado, sin reemplazar las garantías analíticas del controlador. La solución numérica arrojó una matriz de Lyapunov definida positiva γ*=19.9876, con λ_min=0.0882, y autovalores en lazo cerrado con una parte real máxima igual a -0.9294, lo que verifica las condiciones de estabilidad en el dominio politópico considerado. La evaluación de frecuencia resultó en ‖T_wz‖_∞=0.2387. Para la etapa inteligente, la arquitectura MLP con capas ocultas [24,12] presentó, en el conjunto de prueba independiente, una precisión del 65.78% y un Macro-F_1 del 65.80%. Los resultados demuestran la viabilidad de integrar la síntesis robusta basada en LMI, el manejo explícito de la saturación y la clasificación neuronal, preservando la separación entre las garantías formales de estabilidad y la función de supervisión de la MLP. Las garantías asociadas a la saturación son válidas en la región definida por las condiciones sectoriales adoptadas.

Palabras clave: Control Robusto. Sistemas Cuasi-LPV. Desigualdades Matriciales Lineales. Cuadricópteros. Redes Neuronales MLP.

1 INTRODUÇÃO

Os veículos aéreos não tripulados (VANTs), particularmente os quadricópteros, têm recebido crescente atenção em aplicações de inspeção, monitoramento, agricultura de precisão, transporte e operações autônomas. Entretanto, sua dinâmica não linear, multivariável e acoplada, associada a incertezas paramétricas, perturbações externas e limitações dos atuadores, torna relevante o desenvolvimento de estratégias capazes de assegurar estabilidade, robustez e desempenho.

Uma alternativa para tratar essas características consiste no emprego de representações *Linear Parameter-Varying* (LPV) e Quase-LPV, nas quais determinadas não linearidades são incorporadas aos parâmetros de escalonamento. Quando esses parâmetros pertencem a intervalos conhecidos, modelos politópicos podem ser utilizados para estabelecer condições de estabilidade e desempenho a partir de um conjunto finito de vértices (KHALIL et al., 2023).

Nesse contexto, as Desigualdades Matriciais Lineares (*Linear Matrix Inequalities* — LMIs) fornecem uma estrutura adequada para a formulação convexa de problemas de controle robusto. A combinação de funções de Lyapunov, desempenho $H\infty$, Lema Real Limitado e Complemento de Schur possibilita estabelecer condições matriciais para estabilidade e atenuação de perturbações (BOYD et al., 1994; ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1996). Entretanto, a presença de saturação nos atuadores exige tratamento adicional, uma vez que comandos superiores à capacidade física disponível podem comprometer as propriedades estabelecidas durante a síntese. Neste trabalho, essa não linearidade é representada por uma estrutura de Lur'e e incorporada às condições de análise por meio de restrições setoriais e da S-Procedure.

Paralelamente, redes neurais vêm sendo empregadas em sistemas de controle para identificação, estimação e reconhecimento de condições operacionais, inclusive em quadricópteros sujeitos a perturbações e saturação (WANG; AN; LU, 2025). Neste estudo, uma rede Perceptron Multicamadas (*Multilayer Perceptron* — MLP) é utilizada exclusivamente como camada supervisória de classificação, mantendo-se as garantias analíticas de estabilidade e desempenho associadas à formulação robusta baseada em LMIs.

Embora modelagem Quase-LPV, controle $H\infty$, LMIs, tratamento da saturação e redes neurais sejam abordagens consolidadas ou investigadas individualmente, sua integração em uma estrutura que preserve a distinção entre síntese robusta e supervisão inteligente constitui a motivação deste trabalho. Assim, estabelece-se a seguinte questão de pesquisa: é possível integrar modelagem Quase-LPV politópica, desempenho $H\infty$, tratamento explícito da saturação por sistemas de Lur'e e classificação por MLP, obtendo garantias formais de estabilidade robusta e, simultaneamente, uma avaliação inteligente das condições operacionais de um quadricóptero?

O objetivo geral é desenvolver e avaliar computacionalmente uma metodologia de controle robusto inteligente via LMIs para um quadricóptero Quase-LPV sujeito a incertezas, perturbações e saturação dos atuadores. Especificamente, busca-se construir a representação politópica da dinâmica rotacional; formular condições de estabilidade e desempenho $H\infty$); incorporar a saturação mediante uma representação de Lur'e; obter condições convexas de síntese via LMIs; verificar numericamente o desempenho nos vértices do politopo; e utilizar uma MLP para classificar os regimes operacionais a partir das simulações em malha fechada.

A principal contribuição consiste, portanto, na integração dessas ferramentas em uma metodologia que mantém distintas **a** garantia analítica, fornecida pelas condições robustas baseadas em LMIs, e a supervisão inteligente, realizada pela MLP. O restante do artigo apresenta o referencial teórico, a metodologia de síntese e classificação, os resultados computacionais e, por fim, as conclusões.

O restante do artigo está organizado da seguinte forma. A Seção 2 apresenta o referencial teórico necessário à compreensão da abordagem proposta. A Seção 3 descreve a metodologia, incluindo o modelo Quase-LPV politópico, a representação da saturação, a síntese robusta $H\infty$–Lur'e via LMIs e a etapa de classificação pela MLP. A Seção 4 apresenta e discute os resultados computacionais. Finalmente, a Seção 5 reúne as principais conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico deste trabalho está fundamentado em quatro elementos complementares: modelagem Quase-LPV e representação politópica, controle robusto $H\infty$ via LMIs, tratamento da saturação por sistemas de Lur'e e redes neurais MLP aplicadas à supervisão dos regimes operacionais.

2.1 SISTEMAS QUASE-LPV E REPRESENTAÇÃO POLITÓPICA

Os sistemas *Linear Parameter-Varying* (LPV) apresentam dinâmica linear em relação aos estados e às entradas, mas suas matrizes dependem de parâmetros variantes no tempo. De forma geral,

$$\dot{x}(t) = A\big(\rho(t)\big)x(t) + B_u\big(\rho(t)\big)u(t) + B_w\big(\rho(t)\big)w(t) \tag{1}$$

em que $x(t)$ representa o vetor de estados, $u(t)$ corresponde à entrada de controle, $w(t)$ reúne as perturbações externas e $\rho(t)$ é o vetor de parâmetros de escalonamento.

Na representação Quase-LPV, determinadas não linearidades do modelo são incorporadas aos parâmetros de escalonamento, permitindo empregar ferramentas de sistemas lineares variantes em parâmetros sem eliminar completamente a dependência não linear da dinâmica. Quando esses parâmetros são limitados em intervalos conhecidos, as matrizes do sistema podem ser representadas por combinações convexas dos vértices do politopo,

$$A(\rho) = \sum_{i=1}^{N_v} \alpha_i(\rho) A_i,\ B_u(\rho) = \sum_{i=1}^{N_v} \alpha_i(\rho) B_{u_i}\ , \alpha_i(\rho) \geq 0, \sum_{i=1}^{N_v} \alpha_i(\rho) = 1. \quad (2)$$

Essa propriedade permite estabelecer condições convexas de estabilidade e desempenho a partir de um número finito de modelos de vértice. Aplicações Quase-LPV em sistemas aeronáuticos têm explorado essa característica para a formulação de condições robustas baseadas em LMIs, como discutido por Yassuda, Agulhari e Silva (2024). No presente estudo, a abordagem é aplicada aos acoplamentos não lineares presentes na dinâmica rotacional do quadricóptero.

2.2 CONTROLE ROBUSTO $H\infty$ E DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

O controle robusto busca preservar propriedades de estabilidade e desempenho diante de incertezas e perturbações. No critério $H\infty$, procura-se limitar o ganho induzido entre uma entrada exógena w e uma saída de desempenho z, de modo que

$$\|T_{wz}\|_\infty < \gamma \quad (3)$$

em que γ representa um limite para a amplificação das perturbações.

A utilização de uma função quadrática de Lyapunov, combinada ao Lema Real Limitado e ao Complemento de Schur, permite formular condições de estabilidade e desempenho como Desigualdades Matriciais Lineares. De forma geral, uma LMI é expressa por

$$F(\xi) = F_0 + \sum_{k=1}^{p} \xi_k F_k < 0 \quad (4)$$

em que F_k são matrizes simétricas conhecidas e ξ_k representam as variáveis de decisão. Por constituírem restrições convexas, as LMIs podem ser resolvidas por programação semidefinida (BOYD et al., 1994).

Para sistemas politópicos, a existência de uma matriz de Lyapunov comum que satisfaça as condições nos vértices fornece uma condição suficiente de estabilidade quadrática para o politopo considerado. Essa propriedade fundamenta a síntese robusta desenvolvida na Seção 3.

2.3 SATURAÇÃO DE ATUADORES E SISTEMAS DE LUR'E

As limitações físicas dos atuadores devem ser consideradas na síntese, pois o comando solicitado pelo controlador pode exceder a capacidade disponível. A saturação pode ser representada genericamente por

$$u = sat(v) \tag{5}$$

$$sat(v) = \begin{cases} -\bar{u}\,, v < -u \\ v, |v| \leq \bar{u} \\ \bar{u},\ v > \bar{u} \end{cases} \tag{6}$$

em que $\bar{u}$ representa o limite do atuador.

Essa não linearidade pode ser incorporada à análise mediante uma interconexão de Lur'e, constituída por uma parte dinâmica linear e uma não linearidade estática sujeita a restrições setoriais. A função zona morta,

$$\psi(v) = v - sat(v) \tag{7}$$

representa a parcela do comando solicitado que não é fornecida pelo atuador.

Condições setoriais associadas à S-Procedure permitem incorporar essa não linearidade às condições de estabilidade baseadas em Lyapunov e LMIs. A relevância de considerar explicitamente a saturação em sistemas aéreos também é evidenciada por Wang, An e Lu (2025), que investigaram o controle de quadricópteros na presença de restrições de atuação. No presente estudo, a condição setorial será formulada de maneira regional, não implicando estabilidade global para níveis arbitrários de saturação.

2.4 REDES NEURAIS MLP E SUPERVISÃO INTELIGENTE

O Perceptron Multicamadas (*Multilayer Perceptron* — MLP) é uma arquitetura de rede neural composta por uma camada de entrada, uma ou mais camadas ocultas e uma camada de saída. Para uma camada l, sua operação pode ser representada por

$$a^{(l)} = f^{(l)}\left(W^{(l)}a^{(l-1)} + b^{(l)}\right), l = 1, \dots, L \quad (8)$$

em que $W^{(l)}$ representa a matriz de pesos da camada l, $b^{(l)}$ o vetor de bias, a função de ativação e $a^{(l-1)}$ a saída proveniente da camada anterior. Durante o treinamento supervisionado, os pesos e biases são ajustados visando reduzir uma função de perda entre as saídas produzidas pela rede e as classes conhecidas.

As Redes neurais podem ser utilizadas em sistemas dinâmicos para identificação, estimação e classificação. Aplicações recentes também investigam sua integração ao controle de quadricópteros sujeitos a perturbações e saturação (WANG; AN; LU, 2025).

Neste trabalho, entretanto, a MLP possui função estritamente supervisória: classifica os regimes operacionais a partir de características das respostas em malha fechada. A rede não participa das condições de estabilidade nem substitui o controlador robusto; as garantias analíticas permanecem associadas à formulação baseada em Lyapunov, $H\infty$, Lur'e e LMIs.

2.5 INTEGRAÇÃO ENTRE CONTROLE ROBUSTO E SUPERVISÃO INTELIGENTE

As ferramentas apresentadas desempenham funções complementares. A representação Quase-LPV possibilita construir o modelo politópico; o critério $H\infty$ e a teoria de Lyapunov estabelecem requisitos de estabilidade e atenuação de perturbações; as LMIs permitem formular a síntese como um problema convexo; a estrutura de Lur'e incorpora a saturação; e a MLP acrescenta uma camada de classificação dos regimes operacionais.

A contribuição metodológica explorada neste trabalho consiste em integrar esses elementos mantendo separadas suas responsabilidades: a síntese robusta fornece as garantias analíticas, enquanto a rede neural realiza a supervisão inteligente do comportamento do sistema. A Seção 3 apresenta a formulação matemática e o procedimento computacional empregados para implementar essa integração.

3 METODOLOGIA

A metodologia integra a modelagem Quase-LPV politópica do quadricóptero, a representação da saturação dos atuadores, a síntese robusta $H\infty$ via LMIs e a classificação dos regimes operacionais por uma rede neural MLP.

3.1 MODELO DINÂMICO E REPRESENTAÇÃO QUASE-LPV

Considera-se a dinâmica rotacional do quadricóptero, descrita pelos ângulos de Euler ϕ, $\theta, e\ \psi$, correspondentes, respectivamente, aos movimentos de *roll*, *pitch* e *yaw*. O vetor de estados é definido por

$$x(t) = [\phi(t), \theta(t), \psi(t), \dot{\phi}(t), \dot{\theta}(t), \dot{\psi}(t)] \tag{9}$$

em que $p =, \dot{\phi}, q = \dot{\theta}, r = \dot{\psi}$.

O vetor de controle é constituído pelos torques aplicados aos três eixos:

$$u(t) = [\tau_{\phi}(t), \tau_{\theta}(t), \tau_{\psi}(t)]^T. \tag{10}$$

Considerando os momentos principais de inércia I_x, I_ye I_z, a dinâmica rotacional é representada por

$$\begin{aligned} I_x\dot{p} &= \big(I_y - I_z\big)qr + \tau_{\phi} + d_{\phi} \\ I_y\dot{q} &= (I_z - I_x)pr + \tau_{\theta} + d_{\theta} \\ I_z\dot{r} &= \big(I_x - I_y\big)pq + \tau_{\psi} + d_{\psi} \end{aligned} \tag{11}$$

em que $d_{\phi,}\ d_{\theta}$ e d_{ψ} representam perturbações externas equivalentes.

Os termos qr, pr e pq evidenciam o caráter não linear e acoplado do modelo. Para possibilitar a síntese baseada em LMIs, introduzem-se os parâmetros de escalonamento $\rho_1 = p$, $\rho_2 = q$ obtendo-se a representação Quase-LPV:

$$\dot{x}(t) = A\big(\rho(t)\big)x(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \tag{12}$$

com $w(t) = [d_{\phi}\ \ d_{\theta}\ \ d_{\psi}]^T$.

A matriz dinâmica empregada é

$$A(\rho) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Upsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{P} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

em que $\Upsilon = a_1\rho_2,\ \mathrm{T} = a_2\rho_2\ e\ \mathrm{P} = a_3\rho_1$, $a_1 = \frac{I_y - I_z}{I_x}$, $a_2 = \frac{I_z - I_x}{I_y}$, $a_1 = \frac{I_x - I_y}{I_x}$.

As matrizes das entradas são

$$B_u = B_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/I_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/I_y & 0 \\ 0 & 0 & 1/I_z \end{bmatrix} \quad (14)$$

Para os parâmetros físicos utilizados no estudo, obtêm-se $a_1 = -0{,}8004175$, $a_2 = 0{,}8003213, a_3 = \mathrm{a3} = 2{,}67618 \times 10^{-4}$. Adota-se como domínio de projeto: $q, r \in [-2, 2] rad/s$ resultando nos quatro vértices: $(-2, -2), (-2, 2), (2, -2), (2, 2)$.

Assim, o modelo Quase-LPV pode ser descrito pela combinação convexa

$$A(\rho) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i(\rho) A_i,\ \alpha_i(\rho) \geq 0\ \ \sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 1 \quad (15)$$

O intervalo estabelecido para $q, r \in [-2, 2]\ rad/s$, constitui o domínio de projeto adotado neste trabalho, e não um limite físico universal para quadricópteros.

3.2 FORMULAÇÃO DO DESEMPENHO H_∞

Considera-se inicialmente uma lei de realimentação de estados $v(t) = Kx(t)$, e a saída de desempenho como $z = \begin{bmatrix} Q^{1/2}x \\ R^{1/2}u \end{bmatrix}$ com as matrizes de ponderação adotadas $Q = diag(25,\ 25,\ 10,\ 2,\ 2,\ 1)$, $R = diag(0{,}05,\ 0{,}05,\ 0{,}05)$. Essas ponderações são parâmetros de projeto empregados para estabelecer o compromisso entre regulação dos estados e esforço de controle. Equivalentemente,

$$z = \begin{bmatrix} Q^{1/2} \\ 0_{3\ x\ 6} \end{bmatrix} = C_z x + D_{z_u} u \quad (16)$$

em que $Q = diag(25{,}25{,}10{,}2{,}2, R = diag(,05{,}0{,}05{,}0{,}05)$, sendo Q e R ponderações de projeto. O requisito de desempenho robusto é estabelecido por

$$\|T_{wz}\|_\infty < \gamma, \tag{17}$$

modo que o efeito energético das perturbações sobre a saída de desempenho permaneça limitado.

Considerando a saturação, $u = sat(Kx)$, define-se a função zona morta $\psi(Kx) = Kx - sat(Kx)$, de maneira que $u = Kx - \psi$. Em cada vértice,

$$\dot{x} = \left(A_i + B_{u_i}K\right)x - B_{u_i}\psi + B_{w_i}w. \tag{18}$$

Introduzindo uma matriz auxiliar G, considera-se a região considera-se a região

$$S = (K - G, \bar{u}) = \{x: \left|(K_j - G_j)x\right| \leq \bar{u}_j, j = 1, \dots, m\}. \tag{19}$$

na qual a não linearidade satisfaz a condição setorial generalizada $\psi^T T(\psi - Gx) \leq 0$ em que

$T = diag(t_1, \dots, t_m) > 0$. Essa condição permite incorporar a saturação diretamente à análise de estabilidade.

3.3 SÍNTESE ROBUSTA $H\infty$ - LUR'E VIA LMIs

$V(x) = x^T Px$ com $P = P^T > 0$. Para assegurar simultaneamente estabilidade e desempenho H_∞, impõe-se

$$\dot{V} + z^T z - \gamma^2 w^T w < 0. \tag{20}$$

A condição setorial $\psi^T T(\psi - Gx) \leq 0$ é incorporada à desigualdade de dissipação mediante a S-Procedure, conduzindo à condição suficiente

$$\dot{V} + z^T z - \gamma^2 w^T w - 2\psi^T T(\psi - Gx) < 0. \tag{21}$$

Antes da convexificação, a parte associada à dinâmica pode ser escrita como

A parte quadrática associada à dinâmica resulta na matriz

$$\Theta_i = \begin{bmatrix} PA_i + PB_{u_i}K + (PA_i + -PB_{u_i}K)^T & -PB_{u_i} + G^T T & PB_{wi} \\ * & -2\mathrm{TI} & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (22)$$

A desigualdade ainda não é convexa nas variáveis originais, pois contém produtos entre variáveis de decisão.

Para obter uma formulação convexa, são introduzidas as mudanças de variáveis

$$X = P^{-1}, Y = K, Z = GX, S = T^{-1}, \eta = \gamma^2 \quad (23)$$

Após transformação por congruência e aplicação do Complemento de Schur, obtém-se, para cada vértice $i = 1, \dots N_v$, a LMI de síntese

$$\begin{bmatrix} A_i X + X{A_i}^T P + B_{u_i} T + Y^T {B_{u_i}}^T & -B_{u_i} S + Z^T & B_{wi} & (C_{z_i} X + D_{zu_i} Y)^T \\ * & -2S & 0 & -S{D_{zu_i}}^T \\ * & * & -\eta I & 0 \quad {D_{zw_i}}^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (24)$$

$$\text{com } X = X^T > 0, S = diag(s_1, \dots, s_m) > 0, \eta > 0. \quad (25)$$

A formulação (22) é particularmente importante porque todas as variáveis de decisão aparecem de forma afim, caracterizando um problema convexo de programação semidefinida.

Para assegurar que o elipsoide $\varepsilon(X) = \{x: x^T X^{-1} x \leq 1$, para assegurar que esse elipsoide permaneça contido na região em que a condição setorial é válida, impõe-se, para cada atuador j,

$$\begin{bmatrix} X & \left(Y_j - Z_j\right)^T \\ Y_j - Z_j & {\bar{u}^2}_j \end{bmatrix} \geq 0, j = 1, \dots, m$$

No modelo utilizado, os limites dos torques são:

$$\bar{u} = [0{,}5652502 \;\; 0{,}5652502 \;\; 0{,}1167615]^T \; N.m \; . \quad (26)$$

Esses valores constituem uma aproximação independente por canais; consequentemente, a formulação não representa explicitamente o acoplamento completo da alocação entre os quatro rotores. Além disso, a garantia associada à saturação possui caráter regional, determinado pela condição setorial

3.4 OTIMIZAÇÃO E VALIDAÇÃO COMPUTACIONAL

A síntese do controlador é formulada como o seguinte problema de programação semidefinida usado pelo YALMIP:

$$\begin{cases} \min_{X,Y,Z,S,\eta} \eta \\ sujeito\ a\ X = X^T > 0, S > 0 \\ S = diag(s_1, \dots, s_m) > 0, \eta > 0 \\ \begin{bmatrix} A_iX + XA_i{}^TP + B_{u_i}T + Y^TB_{u_i}{}^T & -B_{u_i}S + Z^T & B_{wi} & (C_{z_i}X + D_{zu_i}Y)^T \\ * & -2S & 0 & -SD_{zu_i}{}^T \\ * & * & -\eta I & 0 \quad D_{zw_i}{}^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \\ \begin{bmatrix} X & (Y_j - Z_j)^T \\ Y_j - Z_j & \bar{u}^2{}_j \end{bmatrix} \geq 0 \\ j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (27)$$

Após a solução do problema, recuperam-se as matrizes originais por: $K = Y^*(Y^*)^{-1}$, G $=Z^*(X^*)^{-1}$, P= $(X^*)^{-1}$, T= $(S^*)^{-1}$ e $\gamma^* = \sqrt{\eta^*}$. A minimização de η equivale à minimização de γ^*, fornecendo o menor limite encontrado pela formulação adotada para o problema de síntese. O problema foi implementado no MATLAB utilizando YALMIP e SDPT3. A validação compreendeu a verificação da factibilidade das LMIs, positividade de P, autovalores das matrizes $A_{cli} = (A_i + B_{ui}K)x + B_{w,i}w$, desempenho em frequência e respostas temporais na presença das perturbações e dos limites de atuação.

3.5 CLASSIFICAÇÃO DOS REGIMES OPERACIONAIS POR MLP

A etapa neural foi executada após a síntese robusta e não participa das garantias de estabilidade. O banco de dados foi constituído por 1.500 simulações de Monte Carlo, das quais foram extraídas seis características:

$$\chi = [e_{RMS} \quad e_{max} \quad u_{RMS} \quad u_{max} \quad J \quad \eta_{sat}]^T \quad (28)$$

Os cenários foram classificados em três regimes — Baixo, Médio e Alto — a partir de um indicador independente de severidade envolvendo magnitude das referências, intensidade das perturbações e posição no domínio Quase-LPV. Essa definição evita construir diretamente os rótulos a partir das próprias características fornecidas à rede.

Os dados foram divididos de forma estratificada em 70% para treinamento, 15% para validação e 15% para teste. A normalização utilizou exclusivamente as estatísticas do conjunto de treinamento. Foram avaliadas as arquiteturas [8], [12], [16], [12,8], [16,8], [24,12], [24,12,6], com cinco repetições por configuração. A arquitetura final foi selecionada pelo maior Macro-F_1 no conjunto de validação, mantendo o conjunto de teste independente até a avaliação final. Foram utilizadas como métricas acurácias, precisão, *recall*, F_1 por classe e MacroF_1.

3.9 METODOLOGIA DA REDE NEURAL MLP

A etapa inteligente foi desenvolvida após a definição do controlador robusto. A MLP não interfere nas LMIs de síntese e não constitui o mecanismo responsável pela estabilidade do sistema. Sua finalidade é classificar os regimes de operação observados nas simulações em malha fechada.

Foi construído um banco de dados por meio de 1.500 simulações de Monte Carlo, abrangendo diferentes referências, perturbações e condições do domínio Quase-LPV. Para cada simulação foram extraídas seis características:

$$\chi = [e_{RMS} \quad e_{max} \quad u_{RMS} \quad u_{max} \quad J \quad \eta_{sat}]^T \tag{29}$$

em que e_{RMS} e e_{max} caracterizam o erro de rastreamento, u_{RMS} e u_{max} caracterizam o esforço de controle, J representa um índice agregado de desempenho e η_{sat} quantifica a ocorrência de saturação.

Os cenários foram distribuídos em três classes operacionais: $C = \{Baixa,\ Média,\ Alta\}$. A classificação-alvo foi construída a partir de um indicador independente de severidade do cenário, envolvendo magnitude da referência, intensidade das perturbações e posição no domínio Quase-LPV.

Dessa forma, evitou-se definir diretamente as classes a partir das próprias características utilizadas como entradas da rede. Os dados foram divididos de forma estratificada em: 7% treinamento,15% validacão, 15% teste.

A normalização foi realizada utilizando exclusivamente as estatísticas do conjunto de treinamento, evitando a transferência de informação dos conjuntos de validação e teste para a etapa de ajuste. Foram avaliadas as arquiteturas:

[8], [12], [16], [12,8], [16,8], [24,12], [24,12,6]. (30)

com cinco repetições para cada configuração. A escolha da arquitetura foi realizada exclusivamente a partir do conjunto de validação, utilizando o Macro-F_1 como critério principal. Somente após essa seleção o conjunto de teste independente foi empregado para estimar o desempenho final da rede.

As métricas utilizadas foram acurácia, precisão, *recall* e F_1 por classe, além do Macro-F_1. Os valores obtidos e a matriz de confusão correspondente serão discutidos na Seção 4.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os resultados computacionais abrangem a solução do problema de otimização semidefinida, a verificação das condições de estabilidade e desempenho, as respostas temporais com saturação dos atuadores e a classificação dos regimes operacionais pela MLP.

4.1 SÍNTESE E ESTABILIDADE ROBUSTA

O problema de otimização foi implementado no MATLAB utilizando YALMIP e SDPT3. Considerando os quatro vértices do modelo Quase-LPV, o solver convergiu após 20 iterações, fornecendo foi $\eta^* = 399{,}502367$ e, como $\eta = \gamma^2$, $\gamma^* = 19{,}987555$.O ganho de realimentação de estados recuperado foi $K_{3\,x\,6}$ dada a seguir:

$$K = \begin{bmatrix} -379{,}7 & 0 & 0 & -141{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & -269{,}8 & 0 & 0 & -58{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & -37{,}8 & 0 & 0 & -40{,}7 \end{bmatrix}. \tag{31}$$

A matriz de Lyapunov obtida foi positiva definida, com $\lambda min(P) = 0{,}0882 > 0$. Portanto, a matriz *P* é positiva definida, atendendo à condição estabelecida para a função quadrática de Lyapunov. Os principais resultados da síntese são reunidos na Tabela 1, evitando repetir no texto todos os indicadores já apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Principais Resultados da Síntese Robusta

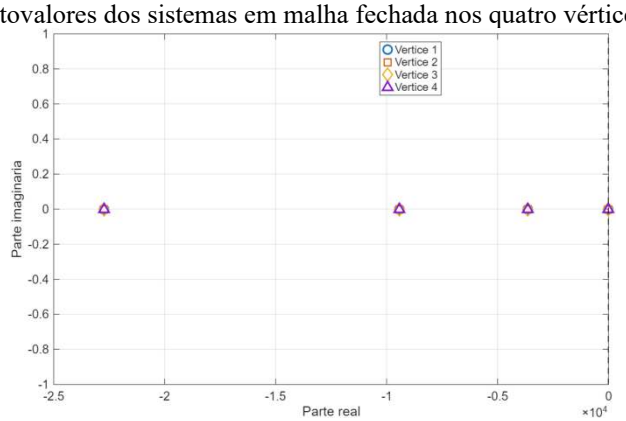
Nº	Indicador	Resultado
1	Número de vértices N_v	4
2	Número de estados n	6
3	Entradas de controle m	3
4	Entradas de perturbação n_w	3
5	Saídas de desempenho n_z	9
6	η∗	399,5024
7	γ∗	19,9876
8	$\lambda min(P)$	0,0882
9	Maior autovalor das LMIs de síntese	$-9{,}9993\times10^{-8}$
10	Menor autovalor das LMIs setoriais	$1{,}0000\times10^{-7}$
11	Maior parte real dos polos	−0,9294

Fonte: Elaborada pelos autores (2026).

As LMIs de síntese apresentaram autovalores máximos negativos nos quatro vértices, verificando sua factibilidade dentro da tolerância numérica adotada. Como os valores estão próximos da fronteira de factibilidade, não se deve interpretá-los como uma ampla margem numérica. A restrição setorial do terceiro atuador também se mostrou praticamente ativa, coerentemente com o menor limite de torque disponível no eixo de *yaw*. O arquivo atual já registra essa proximidade da fronteira, portanto é importante preservá-la na versão reduzida.

Para as matrizes $A_{cli} = (A_i + B_{ui}K)x$, obteve-se $max_i Re\{\lambda(A_{cl,i} = -0{,}9292)\} < 0$, confirmando que os polos dos quatro modelos de vértice permanecem no semiplano esquerdo.

Figura 1 – Autovalores dos sistemas em malha fechada nos quatro vértices do politopo



Fonte: Elaborada pelos autores a partir das simulações no MATLAB (2026).

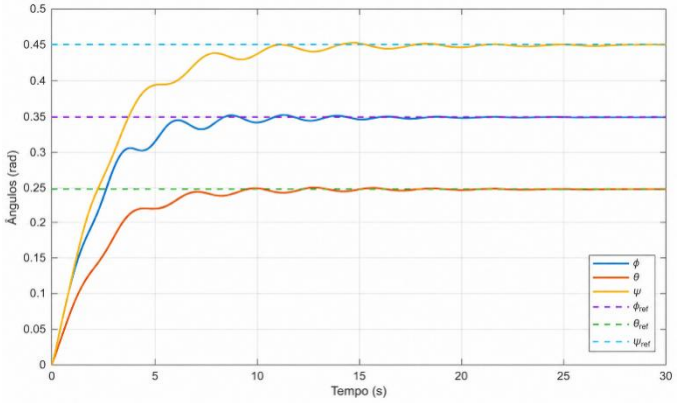
Nesta Figura (1) devem ser utilizados os autovalores efetivamente produzidos pelo MATLAB, mostrando todos os polos no semiplano esquerdo. A linha $R\,e(s) = 0$ pode ser utilizada apenas como referência visual.

4.2 DESEMPENHO $H\infty$, E RESPOSTAS TEMPORAIS

A avaliação em frequência do sistema linear em malha fechada forneceu, para os quatro vértices, $\|T_{wz,i}\|_\infty = 0{,}238706 <$ γ*=19,9876. Esse resultado verifica o limite $H\infty$ para os modelos lineares avaliados. Ressalta-se que 0,2387 corresponde à norma calculada posteriormente e não a um novo valor ótimo γ; além disso, a garantia relativa à saturação permanece associada à região setorial definida na Seção 3.

Nas simulações temporais foram utilizadas as referências $\phi_{ref} = 0{,}35\,rad$, $\theta_{ref} = 0{,}25\,rad$,35 rad, $\psi_{ref} = 0{,}45\,rad$,35. As respostas apresentaram comportamento amortecido e convergência para as referências na presença das perturbações consideradas. O eixo de *yaw* apresentou o transiente mais pronunciado, associado também ao menor limite de atuação.

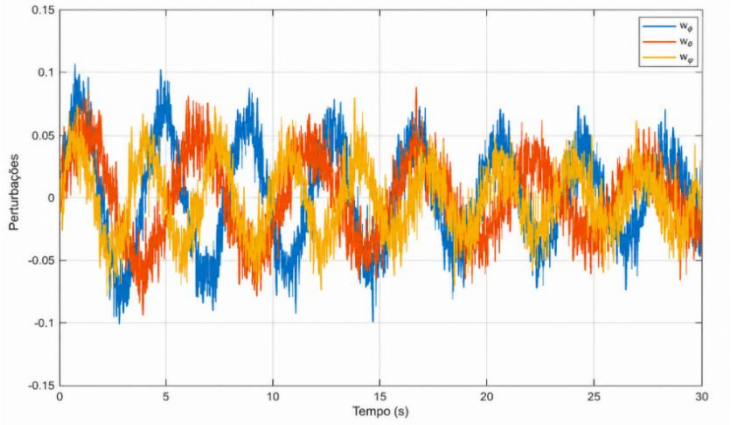
Figura 2. Respostas dos ângulos de Euler e respectivas referências



Fonte: Elaborada pelos próprios autores, (2026)

As perturbações $d_\phi,\ d_\theta,\ d_\psi$ utilizadas nas simulações apresentam comportamento variável ao longo do intervalo considerado, permitindo avaliar a resposta do sistema diante de excitações externas não constantes.

Figura 3 – Perturbações externas aplicadas aos eixos de roll, pitch e yaw

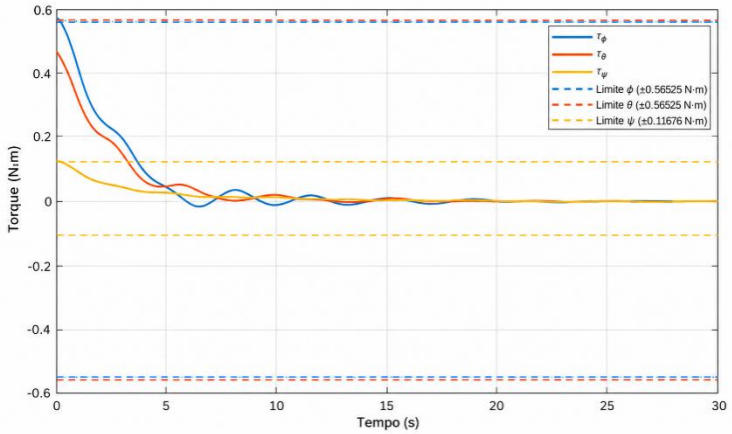


Fonte: Elaborada pelos autores a partir das simulações no MATLAB (2026).

Os sinais de controle foram avaliados juntamente com os limites $|\tau_\phi| \leq 0{,}56525\ Nm$, $|\tau_\theta| \leq 0{,}56525\ Nm$, $|\tau_\psi| \leq 0{,}56525\ Nm$.

A Figura 4 evidencia a atuação do controlador diante das limitações impostas. Sua interpretação deve permanecer vinculada à formulação de Lur'e: a garantia setorial é regional e os limites independentes dos torques constituem a aproximação adotada para os atuadores.

Figura 4 – Torques de controle e limites de saturação dos atuadores



Fonte**:** Elaborada pelos autores a partir das simulações no MATLAB (2026).

4.3 DESEMPENHO DA REDE NEURAL MLP

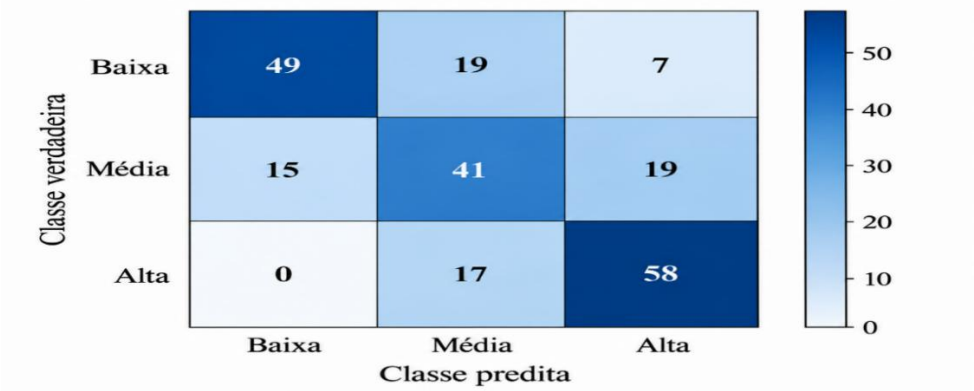
A supervisão inteligente utilizou o banco de 1.500 simulações definido na Seção 3. A arquitetura selecionada pelo conjunto de validação foi 6 – 24 – 12 – 3 com seis entradas, duas camadas ocultas com 24 e 12 neurônios e três saídas correspondentes às classes Baixa, Média e Alta. No conjunto de validação foram obtidos Macro - F_1= 69,82 e acurácia de 69,78%. O conjunto independente de teste, utilizado somente após a seleção da arquitetura, apresentou $[Acurácia] = 65{,}78\%$, $[Macro - F_1 = 65{,}80\%]$. Os resultados individuais são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Desempenho da MLP no conjunto independente de teste

Classe	Precisão (%)	Recall (%)	F_1
Baixa	76,56	65,33	70,50
Média	53,25	54,67	53,95
Alta	69,05	77,33	72,96
Macro -F_1	-	-	**65,80**

Fonte: Elaborada pelos autores (2026).

Figura 5 – Matriz de confusão da MLP otimizada no conjunto independente de teste



Fonte: Elaborada pelos autores a partir dos resultados do MATLAB (2026).

Os resultados mostram melhor reconhecimento das classes extremas: F_1 =70,50% para Baixa e 72 ,96% para Alta, enquanto a classe Média apresentou F_1 =53,95%. Os erros concentram-se predominantemente entre classes adjacentes, sem ocorrência de amostras da classe Alta classificadas diretamente como Baixa. O desempenho global deve ser interpretado como moderado, indicando que a separação dos regimes intermediários constitui o principal ponto a ser aprimorado.

O Macro-F_1 =65,80% corresponde à média dos valores F_1 das três classes, atribuindo igual importância aos diferentes regimes. Assim, complementa a acurácia ao considerar conjuntamente precisão e *recall*.

4.4 DISCUSSÃO INTEGRADA

Os resultados mostram que a formulação proposta foi numericamente factível nos quatro vértices do domínio Quase-LPV, com matriz de Lyapunov positiva definida, polos de malha fechada no semiplano esquerdo e atendimento ao limite $H\infty$ na avaliação linear. A proximidade das LMIs à fronteira numérica e da restrição setorial do eixo de *yaw* evidencia, entretanto, que essas condições não devem ser interpretadas como margens amplas de robustez.

A MLP acrescentou capacidade de classificação dos regimes operacionais, apresentando melhor desempenho nas classes extremas e maior dificuldade na região intermediária. Essa etapa permanece funcionalmente separada da síntese robusta: as garantias analíticas decorrem das condições de Lyapunov, Lur'e e LMIs, enquanto a MLP exerce exclusivamente função supervisória**.**

Finalmente, os resultados devem ser considerados dentro das hipóteses adotadas: a garantia associada à saturação é regional e os limites independentes de torque constituem uma aproximação da atuação física, não contemplando explicitamente a alocação acoplada entre os quatro rotores.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou uma metodologia integrada de controle robusto inteligente para quadricópteros Quase-LPV sujeitos a incertezas, perturbações externas e saturação dos atuadores. A abordagem combinou representação politópica, desempenho \ $H\infty$, teoria de Lyapunov, sistemas de Lur'e e LMIs, complementados por uma rede neural MLP destinada à classificação dos regimes operacionais.

Os resultados computacionais verificaram a factibilidade das condições de síntese robusta no domínio politópico considerado e mostraram que a MLP fornece informação complementar sobre os diferentes regimes operacionais, embora a classificação do regime intermediário ainda apresente maior dificuldade.

A principal contribuição do trabalho consiste na integração dessas ferramentas em uma metodologia na qual suas funções permanecem claramente distintas: as garantias de estabilidade e desempenho decorrem da formulação baseada em Lyapunov e LMIs, enquanto a MLP atua exclusivamente como mecanismo de supervisão e classificação. Ressalta-se que a garantia associada à saturação possui caráter regional e depende das condições setoriais adotadas.

Como perspectivas para trabalhos futuros, destacam-se o aprimoramento da classificação neural, especialmente dos regimes intermediários, a utilização de modelos Quase-LPV de maior fidelidade, a consideração explícita da alocação acoplada dos rotores e a validação experimental da metodologia em uma plataforma física.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Universidade Estadual do Maranhão (UEMA) pelo apoio institucional e pela infraestrutura disponibilizada para o desenvolvimento desta pesquisa. Agradecem, ainda, aos pesquisadores e colaboradores envolvidos pelas discussões acadêmicas e científicas que contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

BOYD, S.; EL GHAOUI, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

GOODFELLOW, I.; BENGIO, Y.; COURVILLE, A. *Deep learning*. Cambridge: MIT Press, 2016.

HAYKIN, S. *Neural networks and learning machines*. 3. ed. Upper Saddle River: Pearson, 2009.

KHALIL, H. K. *Nonlinear systems*. 3. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002.

LÖFBERG, J. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEMS DESIGN, 2004, Taipei. *Proceedings [...]*. Piscataway: IEEE, 2004. DOI: 10.1109/CACSD.2004.1393890.

PIPATPAIBUL, P. Application of online iterative learning tracking control for quadrotor UAVs. *International Scholarly Research Notices*, 2013, Article ID 476153, 2013. DOI: 10.5402/2013/476153.

SIMPLÍCIO, P. et al. Sampled-data robust control of a 2-DoF helicopter modeled using a quasi-LPV framework. *Control Engineering Practice*, v. 145, art. 105870, 2024. DOI: 10.1016/j.conengprac.2024.105870.

TOH, K. C.; TODD, M. J.; TÜTÜNCÜ, R. H. SDPT3 — a MATLAB software package for semidefinite programming, version 1.3. *Optimization Methods and Software*, v. 11, n. 1–4, p. 545–581, 1999. DOI: 10.1080/10556789908805762.

WANG, Y.; AN, H.; LU, L. Neural inverse-based fast control of quadrotors with actuator saturation. *ISA Transactions*, v. 164, p. 185–196, 2025. DOI: 10.1016/j.isatra.2025.05.025.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. *Robust and optimal control*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996.