ReGeo ISSN: 2177-3246

ESTUDOS UNIDIMENSIONAIS DO MOVIMENTO EM SUSPENSÃO DE SEDIMENTOS FINOS E POLUENTES EM ESCOAMENTOS COM SUPERFÍCIE LIVRE

ONE-DIMENSIONAL MOVEMENTS STUDIES OF FINE SUSPENDED SEDIMENTS AND OF POLLUTANTS IN OPEN CHANNEL FLOW

ESTUDIOS DE MOVIMIENTOS UNIDIMENSIONALES DE SEDIMENTOS FINOS Y DE CONTAMINANTES EN SUSPENSIÓN EN FLUJO EN CANAL ABIERTO

https://doi.org/10.56238/revgeov17n10-172

Data de submissão: 24/09/2026 **Data de publicação:** 24/10/2026

Marcia Maria Guimarães
Doutora em Ciências em Engenharia Civil/Recursos Hídricos
Instituição: Universidade Estadual de Montes Claros (UNIMONTES)
E-mail: marcia.guimaraes@unimontes.br
Lattes: http://lattes.cnpq.br/6892977574823753
Orcid: https://orcid.org/0000-0001-6908-575X

RESUMO

Este artigo apresenta os resultados de estudos unidimensionais do movimento em suspensão de sedimentos finos (pelíticos e não pelíticos) e poluentes (fixados em sedimentos finos, dissolvidos ou na forma coloidal), em escoamentos com superfície livre. Considerou-se a dispersão longitudinal de um grupo de partículas injetadas instantânea e uniformemente através de uma seção transversal. Para a calibração e validação dos modelos analíticos e numéricos elaborados, utilizaram-se dados de experiências realizadas em canais de laboratório, na Universidade do Colorado, USA. Os resultados mostraram em que condições experimentais as hipóteses da Teoria Fickiana são válidas. Nos modelos numéricos, discretizados pelo método das diferenças finitas, inseriram-se coeficientes de ponderação espacial e temporal, minimizando sensivelmente os problemas de oscilação e difusão numérica. Para as aplicações nos escoamentos naturais, os modelos poderão ser calibrados e validados com uso de traçadores, os coeficientes de dispersão e velocidades médias dos dispersantes sendo determinados em função da distância e do tempo.

Palavras-chave: Equação Advecção-difusão. Sedimentos Pelíticos e não Pelíticos. Poluentes. Traçadores Fluorescentes.

ABSTRACT

This article presents the results of one-dimensional studies on the suspended transport of fine sediments (pelitic and non-pelitic) and pollutants (bound to fine sediments, dissolved, or in colloidal form) in free-surface flows. The longitudinal dispersion of a group of particles instantaneously and uniformly injected across a cross-section was considered. Data from experiments conducted in laboratory channels at the University of Colorado, USA, were used for the calibration and validation of the analytical and numerical models developed. The results indicated the experimental conditions under which the assumptions of Fickian Theory are valid. In the numerical models, discretized using the finite-difference method, spatial and temporal weighting coefficients were incorporated, significantly reducing oscillation issues and numerical diffusion. For applications in natural flows, the models may be calibrated and validated through the use of tracers, with dispersion coefficients and mean dispersant velocities determined as functions of distance and time.

Keywords: Advection-diffusion Equation. Pelitic and non-Pelitic Sediments. Pollutants. Fluorescent Tracers.

RESUMEN
Este artículo presenta los resultados de estudios unidimensionales sobre el movimiento en suspensión de sedimentos finos (pelíticos y no pelíticos) y de contaminantes (adsorbidos en sedimentos finos, disueltos o en forma coloidal) en flujos con superficie libre. Se consideró la dispersión longitudinal de un grupo de partículas inyectadas de manera instantánea y uniforme a través de una sección transversal. Para la calibración y validación de los modelos analíticos y numéricos desarrollados, se utilizaron datos de experimentos realizados en canales de laboratorio de la Universidad de Colorado, Estados Unidos. Los resultados mostraron bajo qué condiciones experimentales las hipótesis de la Teoría Fickiana son válidas. En los modelos numéricos, discretizados mediante el método de diferencias finitas, se incorporaron coeficientes de ponderación espacial y temporal, reduciendo significativamente los problemas de oscilación y difusión numérica. Para aplicaciones en flujos naturales, los modelos pueden ser calibrados y validados mediante el uso de trazadores, determinándose los coeficientes de dispersión y las velocidades medias de los dispersantes en función de la distancia y del tempo.

Palabras clave: Ecuación de Advección-difusión. Sedimentos Pelíticos y no Pelíticos. Contaminantes. Trazadores Fluorescentes.

1 INTRODUÇÃO

Os movimentos de substâncias dissolvidas e de partículas de sedimentos finos nos escoamentos com superfície livre têm sido pesquisados desde o Século XIX. Graf (1971), por exemplo, considera os trabalhos dos seguintes pioneiros: Dupuit, de 1865; Partiot e Lechalas, de 1871; Boussinesq 1872 e Kennedy de 1895. O avanço da teoria e as várias experiências realizadas relacionam-se, principalmente, com o estudo dos termos da equação de transferência de grandezas escalares em escoamentos turbulentos com superfície livre, e, em particular, com o estudo dos coeficientes de difusão turbulenta e de dispersão diferenciada.

Dentre as teorias probabilísticas e determinísticas, e suas combinações, adotadas para o estudo do movimento de substâncias dissolvidas e de partículas de sedimentos finos, destacam-se: (*i*) Teoria da difusão-dispersão Fickiana; (*ii*) Teoria de difusão por movimentos contínuos; (*iii*) Teoria de Kolmogoroff da similaridade da turbulência local; (*iv*) Teoria da dispersão longitudinal devido à advecção diferencial, provocada pelos gradientes de velocidade; (*v*) Teoria da difusão aplicada ao movimento de partículas de sedimentos finos em suspensão (Sayre; Chang, 1968; Wilson-Jr, 1987; Guimarães, 2006; Guimarães; Wilson-Jr, 2004, 2005, 2007, 2008, 2014). As Teorias da Difusão-Dispersão Fickiana, da Dispersão Longitudinal devido à Advecção Diferencial e da Difusão-Dispersão Aplicada à Suspensão de Sedimentos Finos fazem analogias entre os processos de difusão molecular, difusão turbulenta e de dispersão de partículas devida aos gradientes verticais de velocidade e de concentração. São ditas Fickianas porque são teorias oriundas de analogias com a Lei da Difusão Molecular de Fick.

O objetivo geral do artigo é a apresentação de modelos numéricos unidimensionais, que sejam soluções das equações diferenciais do movimento de uma mistura líquido-sedimentos ou poluentes, em suspensão, em escoamentos com superfície livre, com transferências verticais de massa.

Os objetivos específicos consistem: (*i*) das deduções das equações analíticas e numéricas, bidimensionais e biadimensionais, (*ii*) do estabelecimento das condições iniciais e de contorno necessárias para a calibração e validação dos modelos propostos.

Para exemplificar a calibração dos modelos 1D foram consideradas as experiências realizadas com corantes (rodamina B) e com partículas de sedimentos (silte natural) no laboratório do *Colorado State University* por Sayre e Chang (1968).

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 TEORIA DA DIFUSÃO-DISPERSÃO FICKIANA

Consideram-se misturas de sedimentos e/ou poluentes em suspensão, tais que,

$$c_v \ll 1; \quad c = \rho_s \, c_v \ll 1 \tag{1}$$

em que os símbolos c, c_v e ρ_s representam, respectivamente, as concentrações mássicas, volumétricas e a densidade do grão de sedimento.

Para essas condições, os valores das velocidades médias do líquido e do sedimento através da seção transversal são próximos. Considera-se, também, que os coeficientes de difusão turbulenta e a velocidade média temporal sejam constantes em todo o campo do escoamento. As partículas são transportadas em suspensão, não havendo retenção das que tocam o leito do escoamento. O movimento unidimensional médio das partículas é descrito pela Equação do Movimento Unidimensional de uma Mistura de Sedimentos Finos num Escoamento Turbulento com Superfície Livre, sem Transferências Verticais, onde se considera que o coeficiente de difusão-dispersão, D_{px}, é constante ou dependente unicamente do tempo,

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} + U \, \frac{\partial C_m}{\partial x} = D_{px} \, \frac{\partial^2 C_m}{\partial x^2} \tag{2}$$

em que C_m representa o valor médio da concentração mássica de sólidos dissolvidos ou poluentes líquidos através da seção transversal e U é a velocidade média do escoamento.

A Equação (2) tem sido utilizada por inúmeros autores, com modificações impostas pelas condições iniciais, de contorno e pelas características físico-químicas do dispersante em aplicações em escoamentos de ambientes fluvial e estuarino, desde Taylor (1921, 1953); Fischer (1967); Sayre e Chang (1968); Liu (1977); Wilson-JR. (1987); Islam e Chaudhry (1997); Wang e Lacroix (1997); Zoppou e Knight (1997); Rutherford (1999); Deng *et al*. (2002); Singh e Beck (2003); Guimarães e Wilson-JR (2004, 2005); Guimarães (2006); Baek, Seo e Jeong (2006); Carr e Rehmann (2007); Ani *et al.* (2009); Piotrowski *et al*. (2011); Chin (2013); Zeng e Huai (2014); Baek (2018); Shin, Seo e Seo (2020); Nwidadah e Adeloye (2020); Wang *et al*. (2022), entre outros.

A solução analítica Euleriana da Equação (2) é dada pelas Equação (3) e (4),

$$C_m(t, x) = \frac{M}{B \, h} \frac{1}{\mathrm{U}} \, q_x(t) \tag{3}$$

em que $q_x(t)$ é a função densidade de probabilidade do tempo de passagem das partículas de massa total M, através da seção molhada de largura B e altura h, situada à distância x da seção de injeção,

$$q_x(t) = U\ f_t(x) = \frac{U}{2\sqrt{\pi D_{px}\ t}} \exp\left[\frac{-(x - U\ t)^2}{4\ D_{px}\ t}\right] \quad (4)$$

As Equações (3) e (4) fornecem a solução analítica do movimento unidimensional de uma suspensão de sedimentos finos e poluentes injetados instantânea e uniformemente numa seção transversal do escoamento. Além dessa condição inicial, foram admitidas as seguintes hipóteses simplificadoras: (1) a velocidade e o coeficiente de dispersão longitudinal médio do dispersante são constantes; (2) o dispersante e a mistura (dispersante–fluido vetor) possuem as mesmas propriedades físicas, incluindo as mesmas densidade e velocidade média de transporte, U.

3 METODOLOGIA

3.1 EXPERIÊNCIAS COM TRANSFERÊNCIAS VERTICAIS DE SAYRE E CHANG (1968)

Foram considerados os trabalhos realizados em canais de laboratório por Sayre e Chang (1968) com traçador fluorescente (rodamina B) e com partículas de sedimentos naturais (siltes). Essas experiências foram realizadas no laboratório de hidráulica da Universidade Estadual do Colorado, em Fort Collins, EUA num canal prismático de seções retangulares, de 46,0 m de comprimento por 2,40 m de largura por 0,61 m de profundidade. A rugosidade do leito foi simulada artificialmente por meio de pequenos pedaços de madeira de dimensões 7,62x1,91x1,59 cm, uniformemente distribuídos no leito do canal. As características hidráulicas e sedimentológicas dos ensaios estão no Quadro 1.

Quadro 1. Condições hidráulicas e sedimentológicas das experiências de Sayre e Chang (1968) com traçadores fluorescentes

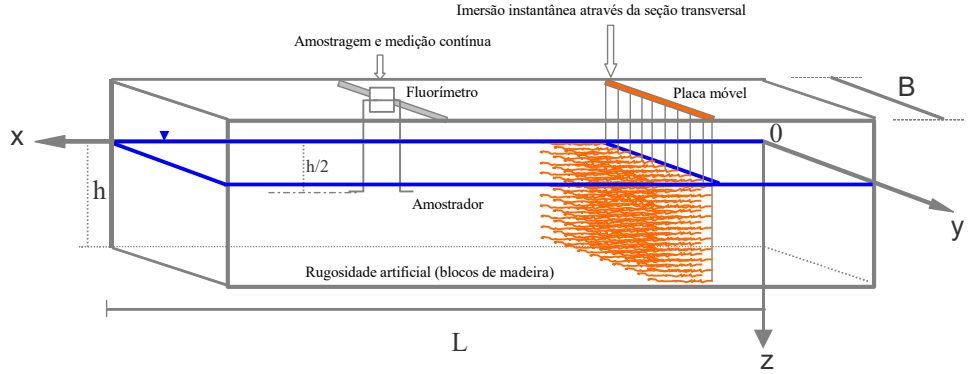
GRANDEZA Símbolo	GRANDEZA Unidade	VALORES EXPERIMENTAIS	DESCRIÇÃO DA GRANDEZA
B	m	2,40	Largura do canal
h	m	0,15	Tirante ou altura da coluna de água
L	m	46,00	Comprimento do canal
$\mathcal{U}$	m	0,228	Velocidade média do escoamento
Q	l/s	82	Vazão líquida média do escoamento
$S_o \# S_f$	-	0,0001	Declividades longitudinais do leito e da superfície livre para o escoamento uniforme
θ	ºC	20	Temperatura da água
u_*	cm/s	3,84	Velocidade média de atrito junto ao leito
τ_o	N/m^2	1,47	Tensão tangencial média do escoamento junto ao leito
ν	m^2/s	1,00 x 10^{-6}	Viscosidade cinemática da água
R_E	-	35000	Número de Reynolds do escoamento
F_R	-	0,19	Número de Froude do escoamento
$C/\sqrt{g}$	-	6,0	Fator de resistência, sendo c o coeficiente de resistência de Chèzy
K	m	0,013	Rugosidade do leito, considerada igual ao diâmetro médio do material do leito

Observações:
1) Injeção instantânea uniformemente distribuída na seção transversal do canal;
2) Leito artificialmente rugoso.

Fonte: Guimarães; Wilson-Jr (2004, 2005). Guimarães (2006, 2025).

Consideram-se neste artigo os estudos sobre a dispersão longitudinal de traçador fluorescente, LO-D1 (*Longitudinal Dispersion – Dye*), e de partículas de silte natural em suspensão, na faixa de 15 a 40 µm, LO-FS1 (*Longitudinal Dispersion – Fine Sediment*). Os dispositivos elaborados para as injeções instantâneas de uma solução de traçador fluorescente ou de uma mistura líquido-sedimentos, distribuídos uniformemente na seção transversal, estão esquematizados na Figura 1.

Figura 1. Sistema esquemático de imersão, amostragem e medição do tempo de passagem do traçador através de uma seção transversal, utilizado por de Sayre e Chang (1968)



Fonte: Guimarães; Wilson-Jr (2004, 2005, 2007, 2008, 2014). Guimarães (2006, 2025).

As amostragens, contínuas nos ensaios com traçadores fluorescentes e integradas durante períodos curtos de tempo nos ensaios com sedimentos, foram realizadas no eixo do canal, a meia profundidade (0,5 h). As concentrações dos corantes foram determinadas com um Fluorímetro Turner Modelo 111, e dos sedimentos, por filtração, evaporação e pesagens em laboratório. Os resultados foram apresentados em função do tempo, para cada uma das seções de amostragem situadas a jusante da imersão. As distâncias entre a seção de imersão e as de amostragem foram: 10, 20, 27 e 35 metros.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 APLICAÇÕES DOS MODELOS NUMÉRICOS

Foram comparados entre si, os dados dos ensaios de Sayre e Chang (1968), com traçador fluorescente e silte natural, realizados sob as mesmas condições hidrodinâmicas e sedimentológicas.

4.1.1 Determinação da velocidade média de transporte

Os tempos médios de passagem do grupo de partículas pelas seções distantes 10, 20, 27 e 35m da seção de imersão, estão apresentados no Quadro 2, juntamente com suas velocidades médias de trânsito. Para a distância 35 m da seção de imersão, foram realizadas duas experiências com traçador fluorescente, 35 e 35(A) e levantadas duas curvas de passagem.

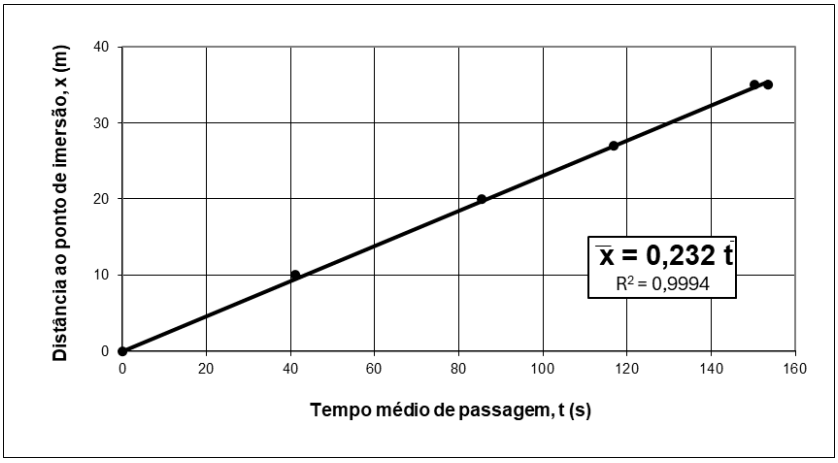
Quadro 2. Tempos e velocidades médias de trânsito das partículas de traçador fluorescente e sedimentos finos das experiências de Sayre e Chang (1968).

Distância à seção de imersão, *x* (m)	**EXPERIÊNCIAS COM TRAÇADOR FLUORESCENTE, LO-D1**		**EXPERIÊNCIAS COM SEDIMENTOS FINOS, LO-FS1**	
	Tempo médio de passagem, $\bar{t}$ (s)	**Velocidade média das partículas, U_{px} (m/s)**	**Tempo médio de passagem, $\bar{t}$ (s)**	**Velocidade média das partículas, U_{px} (m/s)**
10	41,1	0,242	48,62	0,206
20	85,5	0,235	87,46	0,229
27	116,9	0,230	114,70	0,235
35	153,6	0,228	155,71	0,225
35 (A)	150,4	0,232	–	–

Fonte: Sayre; Chang (1968). Guimarães; Wilson-Jr (2004, 2005). Guimarães (2006).

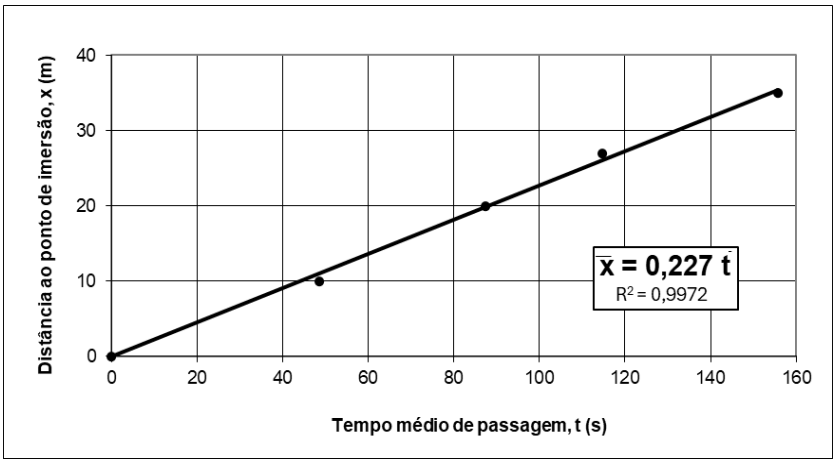
Os valores das velocidades médias das partículas, constantes ao longo do canal, foram obtidos ajustando-se uma reta aos pontos da Figura 2 (traçador fluorescente) e da Figura 3 (siltes), onde as distâncias à seção de injeção foram plotadas em função dos tempos médios de passagem das partículas através das seções de medições. A velocidade média das partículas é dada pelo coeficiente angular da reta, que obrigatoriamente passa pela origem, como mostrado nas figuras.

Figura 2. Distâncias percorridas pelas partículas em função do tempo médio de passagem do traçador fluorescente das experiências LO-D1 de Sayre e Chang (1968).



Fonte: Sayre; Chang (1968). Guimarães; Wilson-Jr (2005). Guimarães (2006).

Figura 3. Distâncias percorridas em função do tempo médio de passagem das partículas de sedimentos finos das experiências LO-FS1 de Sayre e Chang (1968).



Fonte: Sayre; Chang (1968). Guimarães; Wilson-Jr (2004). Guimarães (2006).

É interessante observar nessas figuras que o valor da velocidade média das partículas de traçador fluorescente, U_{px} = 0,232 m/s, é superior à velocidade média do fluido, U = 0,227 m/s. Isso significa que a injeção do traçador não foi distribuída instantânea e uniformemente na seção transversal, como idealizado. Na realidade, a constatação visual realizada por Sayre e Chang (1968) em seus ensaios não é suficiente para comprovar a uniformidade do traçador através da seção transversal de injeção. Amostragens através dessa seção, ou nas seções próximas a jusante, teriam sido mais conclusivas. Por outro lado, o valor medido da velocidade média das partículas de sedimentos finos, U_{px} = 0,227 m/s, é praticamente equivalente à velocidade média do fluido, U = 0,228 m/s.

4.1.2 Coeficiente de dispersão

Guimarães (2006) desenvolveu dois programas denominados CDI-1D-A e CDI-1D-N, os quais selecionam o valor de K_{px} tal que a soma dos desvios quadráticos entre os valores teóricos e experimentais (CDI-1D-A) e numéricos e experimentais (CDI-1D-N), das funções densidade ou de distribuição de probabilidade do tempo de trânsito das partículas seja mínima.

Foram realizados três tipos de ajustes das funções densidade de probabilidade teórica, os quais consideram: 1º) a velocidade média do traçador igual à velocidade média do fluido, ou seja, $U_{px} = U$, e um único valor do coeficiente de dispersão K_{px}; 2º) a velocidade média do traçador igual à velocidade média do fluido, $U_{px} = U$, com valores do coeficiente de dispersão determinados para cada seção de medidas, ou seja, para cada experiência, separadamente; 3º) os valores da velocidade média de trânsito das partículas e do coeficiente de dispersão, determinados para cada experiência.

Os valores das funções objetivo e os respectivos coeficientes de dispersão em função da velocidade média do escoamento, calibrados através do Programa CDI-1D-A, para as condições do 1º ajuste, estão apresentados na Quadro 3.

Quadro 3. Valores do coeficiente de dispersão para o conjunto das experiências de Sayre e Chang (1968)

VARIÁVEIS	EXPERIÊNCIAS COM TRAÇADOR FLUORESCENTE, LO-D1	EXPERIÊNCIAS COM SEDIMENTOS FINOS, LO-FS1
Velocidade média do escoamento, U (m/s)	0,228	0,228
Função objetivo, χ	0,005905	0,002753
Coeficiente de dispersão, K_{px} (m^2/s)	0,0343	0,0299

Fonte: Guimarães; Wilson-Jr (2004, 2005). Guimarães (2006).

O Quadro 4 apresenta os resultados do 2º ajuste. Observa-se que os ajustes foram melhores que o anterior, tendo em vista que os valores das funções objetivo foram menores. No Quadro 5 são apresentados os resultados do 3º ajuste. Os valores das funções objetivo mostram que essa calibração produziu resultados ainda melhores do que os dois ajustes anteriores, ou seja, os melhores ajustes foram obtidos quando as experiências foram consideradas e analisadas de forma independente, embora sob as mesmas condições hidrodinâmicas médias temporais.

Quadro 4. Coeficientes de dispersão obtidos do 2º ajuste para cada experiência de Sayre e Chang (1968), considerando a velocidade média das partículas igual à do escoamento.

Distância à seção de imersão x (m)	EXPERIÊNCIAS COM TRAÇADOR FLUORESCENTE, LO-D1		EXPERIÊNCIAS COM SEDIMENTOS FINOS, LO-FS1	
	Função objetivo, χ	Coeficiente de dispersão, K_{px} (m²/s)	Função objetivo, χ	Coeficiente de dispersão, K_{px} (m²/s)
10	0,002930	0,0463	0,000914	0,0323
20	0,001164	0,0364	0,000421	0,0207
27	0,000437	0,0278	0,000743	0,0425
35	0,000062	0,0289	0,000036	0,0301
35 (A)	0,000758	0,0275	–	–

Fonte: Guimarães; Wilson-Jr (2004, 2005). Guimarães (2006).

Quadro 5. Valores do coeficiente de dispersão de cada experiência LO-D1 e LO-FS1 de Sayre e Chang (1968).

Distância à seção de imersão x (m)	EXPERIÊNCIAS COM TRAÇADOR FLUORESCENTE, LO-D1			EXPERIÊNCIAS COM SEDIMENTOS FINOS, LO-FS1		
	Velocidade média U_{px} (m/s)	Função objetivo χ	Coeficiente de dispersão K_{px} (m²/s)	Velocidade média U_{px} (m/s)	Função objetivo χ	Coeficiente de dispersão K_{px} (m²/s)
10	0,242	0,000649	0,0387	0,219	0,000374	0,0284
20	0,235	0,000199	0,0327	0,232	0,000053	0,0203
27	0,230	0,000195	0,0272	0,237	0,000018	0,0400
35	0,228	0,000062	0,0289	0,227	0,000025	0,0299
35 (A)	0,232	0,000146	0,0247	–	–	–

Fonte: Guimarães; Wilson-Jr (2004, 2005). Guimarães (2006).

4.1.3 Moda e concentração máxima

Comparando-se as Equações (3) e (4), obtém-se:

$$\left\{ q_x(t) \right\}_{máx} = \frac{U}{\sqrt{4\,\pi\,K_{px}}} \frac{1}{\sqrt{t_{máx}}} \tag{5}$$

Como trata-se de várias experiências, e como os valores da velocidade média de trânsito das partículas e do coeficiente de dispersão do corante determinados por experiências foram os que proporcionaram os melhores ajustes das funções densidade de probabilidade do tempo de passagem das partículas, adotaram-se os valores da Quadro 5, precedente. Desta forma, a Equação (5) adotou a seguinte forma,

$$\left\{ q_x(t) \right\}_{máx} = \frac{U_{px}}{\sqrt{4\,\pi\,K_{px}}} \frac{1}{\sqrt{t_{máx}}} \tag{6}$$

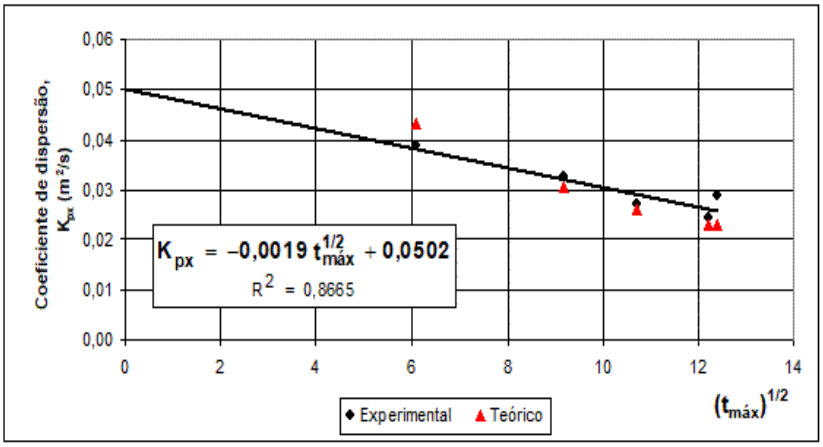
Utilizou-se a Equação (6) para o cálculo dos dados do Quadro 6 foram plotados na Figura 4 os valores do coeficiente de dispersão de cada experiência foram relacionados graficamente com a raiz quadrada do tempo de passagem do máximo da função densidade de probabilidade.

Quadro 6. Valores obtidos dos ensaios de Sayre e Chang (1968) sobre o movimento de traçador fluorescente

$\bar{t} \cong t_{máx}$	$\{q_x(t)\}_{máx}$		U_{px}	K_{px}	$\frac{U_{px}}{\sqrt{4\pi K_{px}}}$	$\frac{1}{\sqrt{t_{máx}}}$
(s)	Experimental (s^{-1})	Teórico (s^{-1})	(m/s)	(m^2/s)	($s^{-1/2}$)	($s^{-1/2}$)
37	0,0545	0,0541	0,242	0,0387	0,3470	0,1644
84	0,0408	0,0396	0,235	0,0327	0,3666	0,1091
115	0,0365	0,0364	0,230	0,0272	0,3934	0,0933
154	0,0303	0,0305	0,228	0,0289	0,3783	0,0806
149	0,0343	0,0340	0,232	0,0247	0,4164	0,0819

Fonte: autoria própria (2026).

Figura 4. Coeficiente de dispersão em função da raiz quadrada do tempo de passagem do pico de concentração do traçador fluorescente através das seções de medidas



Fonte: autoria própria (2026).

Essa figura mostra que os valores do coeficiente de dispersão longitudinal decresceram com o tempo, o que se explica fisicamente, pela diminuição progressiva dos valores dos gradientes longitudinais de concentração, que ocorre com o espalhamento das partículas. As relações entre o coeficiente de dispersão longitudinal e a variância das posições das partículas num tempo fixado, e a variância dos tempos de passagem das partículas por uma seção fixada, serão analisados a seguir.

4.1.4 Funções densidade de probabilidade das experiências LO-D1 de Sayre e Chang (1968)

Utilizando-se o Programa CDI-1D-N e os resultados obtidos no 3º ajuste teórico obteve-se o coeficiente de dispersão que melhor ajustava as curvas numéricas e experimentais. Os valores das funções objetivo mostram que essa calibração produziu bons resultados (Quadro 7).

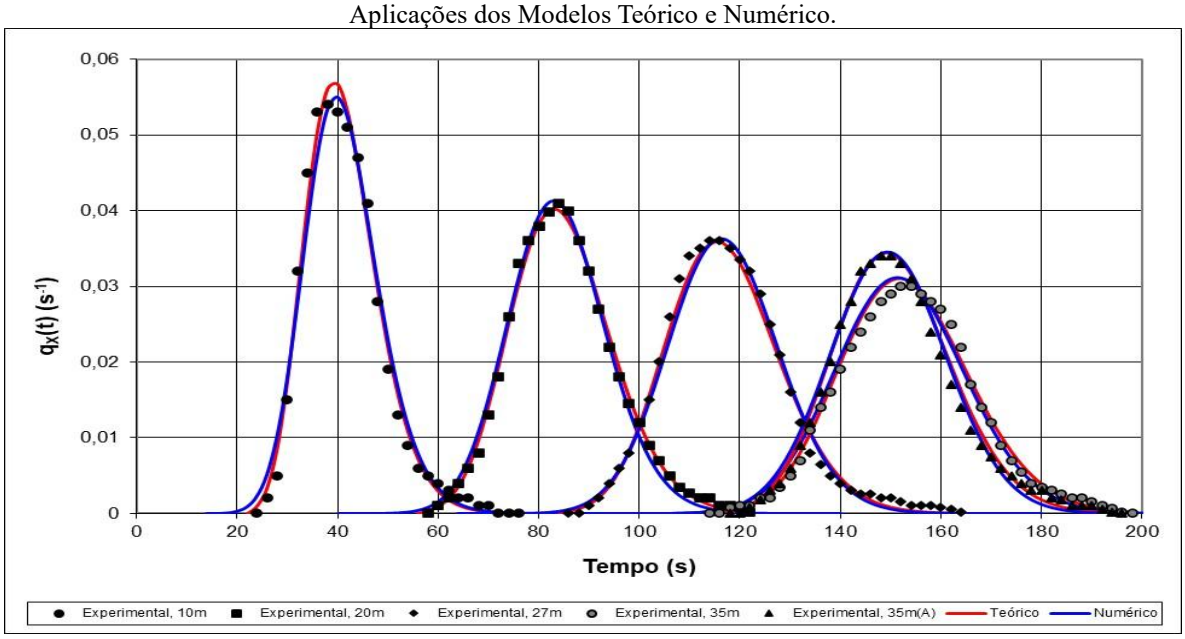
Quadro 7. Coeficiente de dispersão LO-D1 determinado numericamente por experiência (Sayre e Chang, 1968)

Distância à seção de imersão x (m)	Fator de ponderação espacial, ω	Velocidade média U_{px} (m/s)	Função objetivo χ	Coeficiente de dispersão K_{px} (m^2/s)
10	0,65	0,242	0,000093	0,040000
20	0,65	0,235	0,000032	0,032700
27	0,65	0,228	0,000034	0,027800
35	0,65	0,228	0,000036	0,028800
35 (A)	0,65	0,230	0,000029	0,024500

Fonte: Guimarães; Wilson-Jr (2005). Guimarães (2006).

A Figura 5 apresenta as curvas de passagem do dispersante pelas seções de medidas. Verifica-se que os modelos teórico e numérico reproduziram, com boa precisão, as funções densidade de probabilidade do movimento do traçador fluorescente em suspensão das experiências LO-D1 de Sayre e Chang (1968), quando se consideraram os valores das velocidades médias de trânsito das partículas e dos coeficientes de dispersão para cada experiência, separadamente.

Figura 5. Funções densidade de probabilidade do tempo de passagem do traçador fluorescente pelas seções de medidas das experiências LO-D1 de Sayre e Chang (1968). Aplicações dos Modelos Teórico e Numérico.



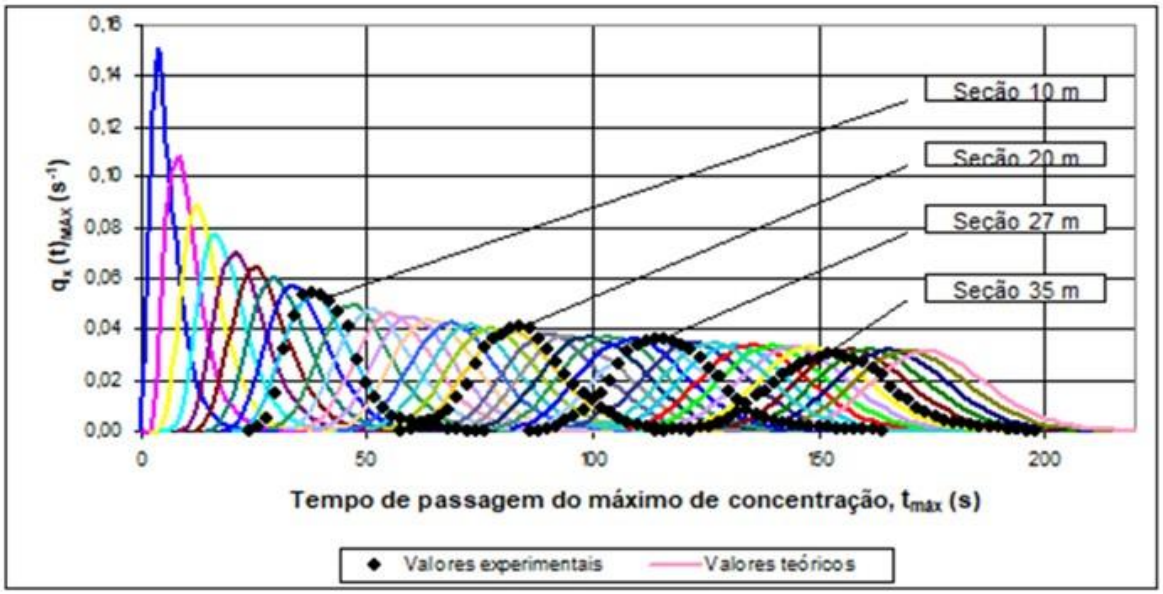
Fonte: Guimarães; Wilson-Jr (2005). Guimarães (2006, 2025).

Verifica-se que o modelo teórico fez uma excelente descrição das funções densidade e das funções de distribuições de probabilidades do movimento de corante em suspensão, considerando-se os valores das velocidades médias de trânsito das partículas e dos coeficientes de dispersão para cada experiência isolada, conforme aplicado no 3º ajuste. Dessa forma, o modelo teórico mostrou-se capaz de prever, com precisão, o tempo de passagem da nuvem de corantes através das seções transversais do canal, podendo ser utilizado no estudo da contaminação de cursos d'água naturais.

Considerando-se a equação apresentada na Figura 4, que explicita o coeficiente de dispersão em função da raiz quadrada do tempo de passagem da moda, e as velocidades médias das partículas (Quadro 5), precedentes, foram calculadas as funções densidade e de distribuição de probabilidades do tempo de passagem do corante por seções situadas desde a imersão até o final do canal, as quais estão apresentadas nas Figuras 6 e 7, respectivamente.

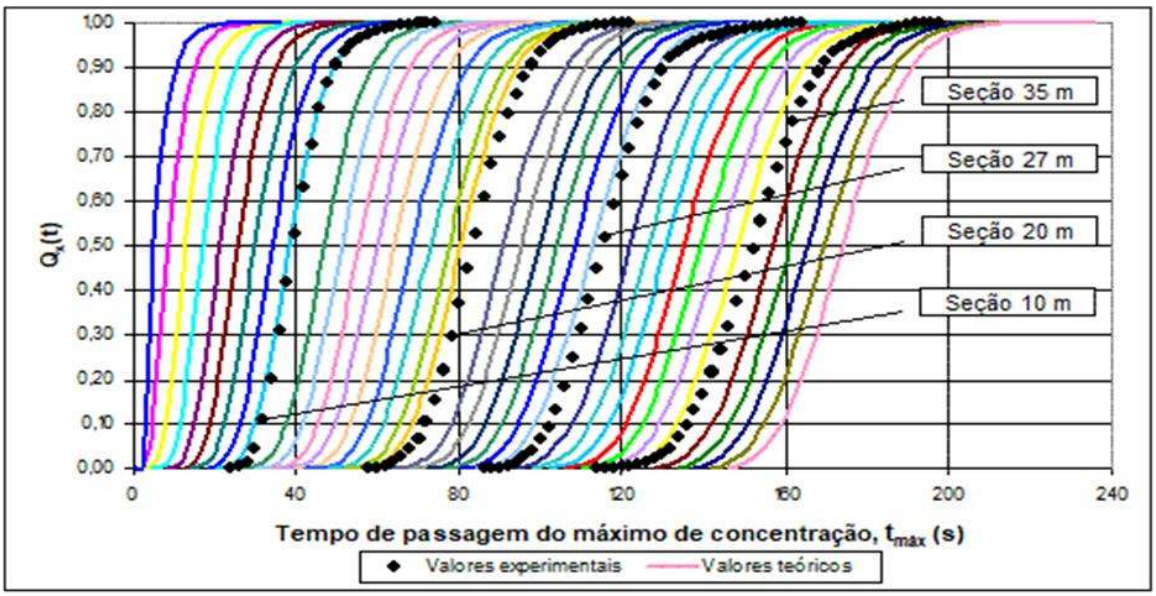
Observa-se na Figura 6 a atenuação dos valores máximos das funções densidade de probabilidades, à medida que a massa de corante injetada vai sendo transportada e dispersa ao longo do canal e no tempo. Na Figura 7, verifica-se que o tempo de passagem da massa total do traçador através das seções transversais aumenta com a distância à seção de imersão. Isto faz com que as curvas das funções de distribuição se tornem menos íngremes com a distância, e que o período de tempo entre o início e final da passagem do corante, através das seções transversais se torne cada vez maior.

Figura 6. Funções densidade de probabilidades estimadas para as experiências LO-D1 de Sayre e Chang (1968)



Fonte: autoria própria (2026).

Figura 7. Funções de distribuições acumuladas estimadas para as experiências LO-D1 de Sayre e Chang (1968)



Fonte: autoria própria (2026).

4.1.5 Funções densidade de probabilidade das experiências LO-FS1 de Sayre e Chang (1968)

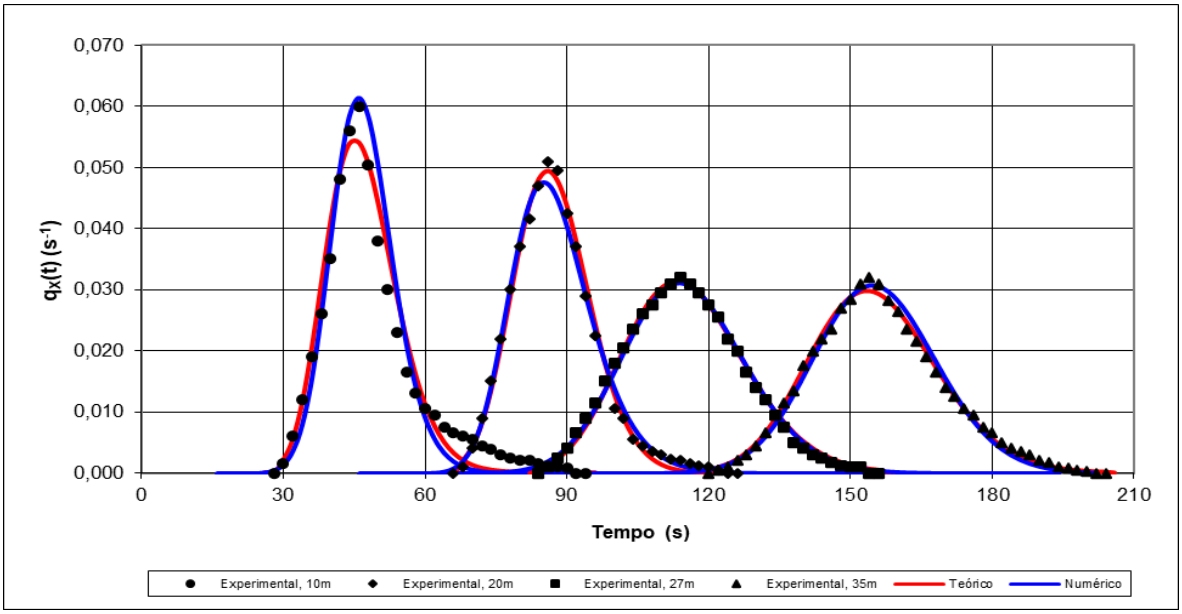
Analogamente, obteve-se o coeficiente de dispersão que melhor ajustava as curvas numéricas e experimentais dos ensaios LO-FS1. Os valores das funções objetivo mostram que essa calibração também produziu bons resultados, conforme apresentado na Quadro 8. A Figura 8 apresenta as curvas de passagem das partículas de sedimentos finos pelas seções de medidas. Verifica-se que o modelo numérico reproduziu tão bem as curvas das funções densidade de probabilidade do tempo de passagem dos sedimentos em suspensão das experiências LO-FS1, consideradas separadamente, quanto o modelo analítico.

Quadro 8. Valores do coeficiente de dispersão de cada experiência LO-FS1 de Sayre e Chang (1968), determinados numericamente.

Distância à seção de imersão, x (m)	**Fator de ponderação espacial, ω**	**Velocidade média, U_{px} (m/s)**	**Função objetivo, χ**	**Coeficiente de dispersão, K_{px} (m²/s)**
10	0,65	0,206	0,001753	0,0695
20	0,65	0,228	0,000145	0,0355
27	0,65	0,220	0,000533	0,0345
35	0,65	0,226	0,000015	0,0288

Fonte: Guimarães; Wilson-Jr (2004). Guimarães (2006).

Figura 8. Funções densidade de probabilidade do tempo de passagem das partículas do sedimento pelas seções de medidas das experiências LO-FS1 de Sayre e Chang (1968). Aplicações dos Modelos Teórico e Numérico.

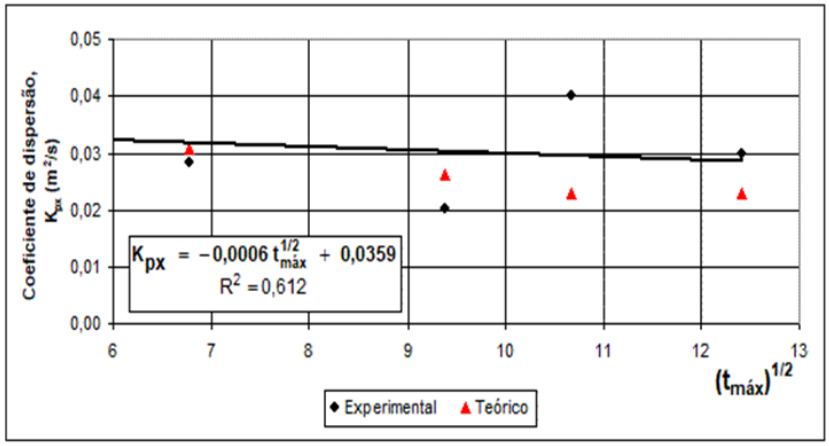


Fonte: Guimarães; Wilson-Jr (2004). Guimarães (2006).

Na Figura 9 os valores dos coeficientes de dispersão de cada experiência foram relacionados graficamente com a raiz quadrada do tempo de passagem do máximo da função densidade de probabilidade. Verifica-se através da Figura 9 e do valor próximo de zero do coeficiente angular da reta, que os valores do coeficiente de dispersão variaram em torno de K_{px} = 0,030 m^2/s, sem que se observasse uma linha de tendência notável de variação deste coeficiente em função do tempo. Considerando o mesmo argumento apresentado para os ensaios com corante, concluiu-se que não houve diminuição progressiva dos valores dos gradientes longitudinais de concentração ao longo do trecho monitorado do canal, provavelmente porque não houve homogeneização do perfil vertical de concentração.

Analogamente aos estudos com corante, considerou-se a equação apresentada na Figura 9, através da qual foram obtidos os valores do coeficiente de dispersão em função da raiz quadrada do tempo de passagem da moda, e as velocidades médias das partículas, U_{px} (Quadro 8), para calcular as funções densidade e de distribuição de probabilidade do tempo de passagem do sedimento fino pelas seções situadas desde a imersão até o final do canal, conforme ilustrado nas Figuras 10 e 11.

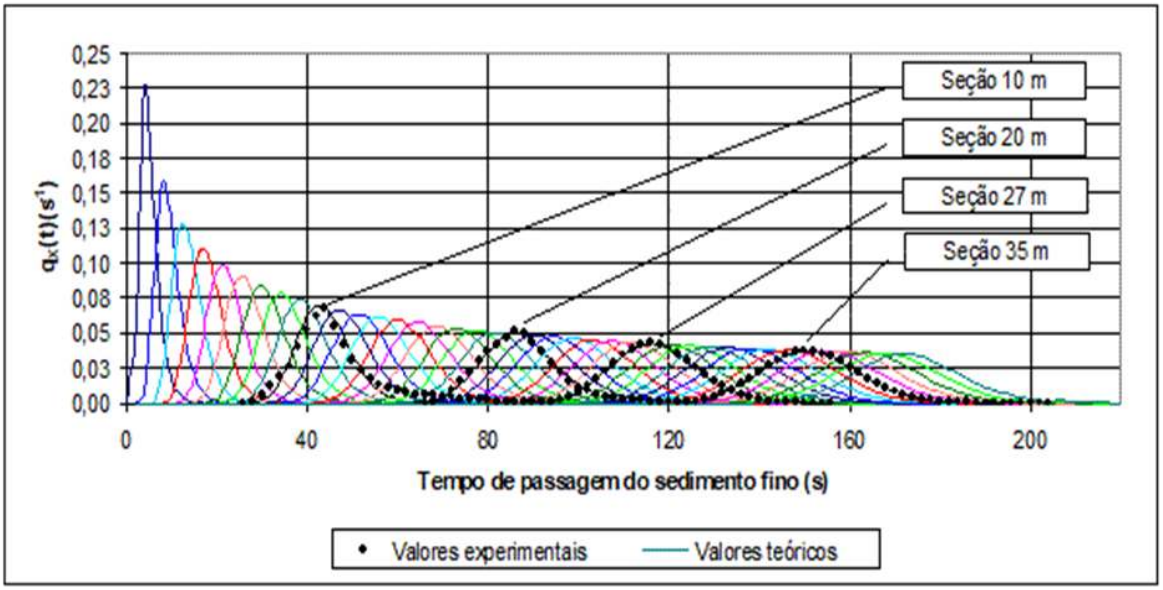
Figura 9. Coeficiente de dispersão em função da raiz quadrada do tempo de passagem do pico de concentração das partículas de sedimentos finos através das seções de medidas.



Fonte: autoria própria (2026).

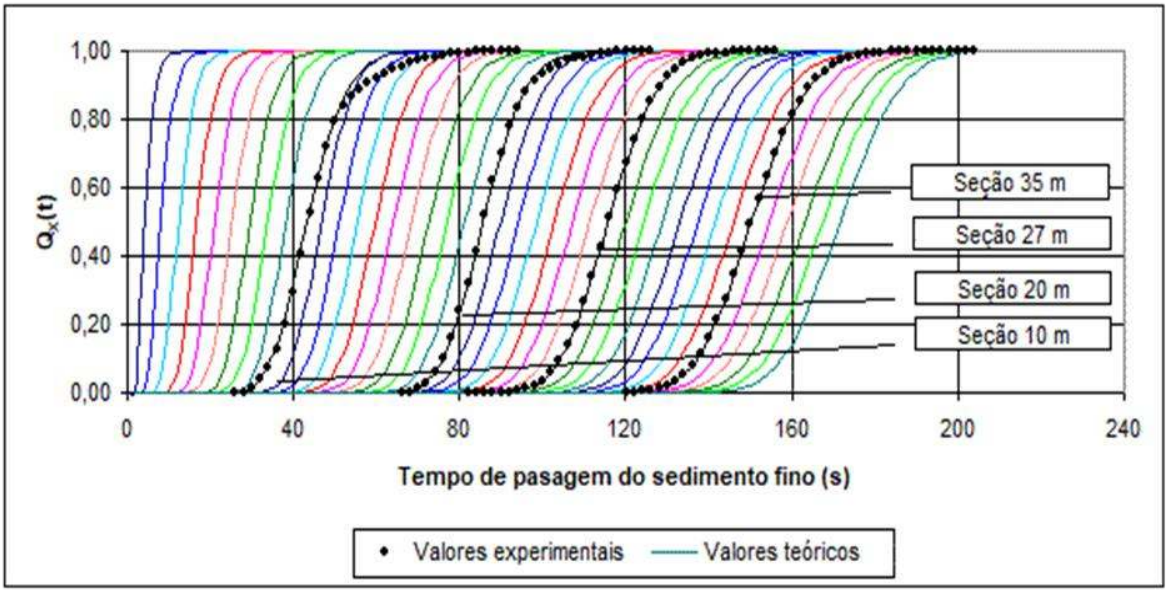
Observa-se nessas figuras um comportamento similar ao verificado no estudo do corante, ou seja, os valores máximos das funções densidade de probabilidade são atenuados à medida que a massa de sedimentos injetada vai sendo transportada e dispersa ao longo do canal e no tempo (Figura 18-10). O tempo de passagem da massa total do traçador através das seções transversais aumenta com a distância à seção de imersão (Figura 19-11).

Figura 10. Funções densidade de probabilidades estimadas para as experiências LO-FS1 de Sayre e Chang (1968).



Fonte: autoria própria (2026).

Figura 11. Funções de distribuições acumuladas estimadas para as experiências LO-FS1 de Sayre e Chang (1968).



Fonte: autoria própria (2026).

5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Sayre e Chang (1968) aplicaram a Teoria de Difusão Fickiana na análise dos resultados de suas experiências, considerando valores constantes para os coeficientes de dispersão e velocidade média do escoamento. Admitiram também, que $U_{px} = U = constante$. Entretanto, constatou-se que o valor medido da velocidade média das partículas de traçador fluorescente (LO-D1), U_{px} = 0,232 m/s, foi superior à velocidade média do fluido, U = 0,228 m/s, em todas as seções. Isso indicou que a distribuição inicial do traçador, aparentemente, não foi uniforme na seção de imersão.

O valor medido da velocidade média das partículas de sedimento (LO-FS1), U_{px} = 0,227 m/s, foi ligeiramente inferior à velocidade média do fluido, U = 0,228 m/s. Essas experiências foram realizadas com sedimentos extremamente finos, na faixa dos sedimentos pelíticos, de modo que o efeito da gravidade não fosse sentido de forma significativa, o que pode não ter ocorrido. Teoricamente, depois de misturados através da seção transversal, os sedimentos pelíticos são transportados com velocidade média igual à do escoamento. Entretanto, na prática, o valor de U_{px} foi ligeiramente menor do que U, o que pode ser devido aos seguintes fatores, entre outros: (*i*) maior densidade da mistura água-sedimento; (*ii*) eficiência do misturamento do dispersante durante a injeção; (*iii*) ação da gravidade e sedimentação; (*iv*) ação dos componentes verticais da turbulência; (*v*) dispositivo e técnica de misturamento e injeção dos sedimentos.

A hipótese Fickiana de coeficiente de dispersão constante em todos os ensaios não foi confirmada, nem nas experiências com traçador fluorescente nem com silte natural. Isso pode ser justificado pelo fato de ter-se utilizado somente um sistema de amostragem contínua, tornando-se

necessário repetir as operações de imersão e de medida de concentração em cada uma das seções estudadas nas mesmas condições hidrodinâmicas médias.

De acordo com Fischer (1967) e Sayre e Chang (1968), a teoria Fickiana apresenta melhores resultados com o aumento do tempo de dispersão, ou da distância ao ponto de imersão. Com efeito, verificou-se que, somente nos ensaios relacionados às seções 27 e 35 m, o transporte e a dispersão do traçador fluorescente não foram influenciados pelas condições de imersão do traçador. Constatação também verificada para as seções 20, 27 e 35 m, nos ensaios com sedimentos finos. Isso significa que para essas distâncias ocorreu bom misturamento do traçador na seção transversal. Observou-se, também, que os menores valores das funções objetivos foram obtidos quando se consideraram os valores da velocidade média de trânsito das partículas e do coeficiente de dispersão, para cada experiência, conforme apresentado no Quadro 7.

6 CONCLUSÃO

O presente estudo teve como objetivo apresentar e avaliar modelos analíticos e numéricos unidimensionais aplicados ao transporte em suspensão de sedimentos finos e poluentes em escoamentos com superfície livre, considerando a dispersão longitudinal de partículas injetadas instantânea e uniformemente em uma seção transversal. A análise dos ensaios de Sayre e Chang (1968), com traçador fluorescente e sedimentos finos, permitiu verificar as condições de aplicabilidade da Teoria Fickiana e evidenciar suas limitações quando se adotam, de forma generalizada, velocidade média de transporte e coeficiente de dispersão constantes para todos os ensaios.

Os resultados demonstraram que os melhores ajustes das funções densidade e de distribuição de probabilidade foram obtidos quando os parâmetros de transporte foram calibrados individualmente para cada experiência. Essa evidência indica que a formulação Fickiana, embora adequada como referência teórica para a descrição do transporte longitudinal, depende da correta representação das condições hidrodinâmicas e sedimentológicas de cada ensaio. Nos experimentos com traçador fluorescente, a velocidade média das partículas foi superior à velocidade média do escoamento, sugerindo influência das condições de injeção e de mistura inicial. Nos ensaios com sedimentos finos, a proximidade entre a velocidade média das partículas e a do fluido confirmou o comportamento esperado para materiais pelíticos em suspensão, ainda que processos como sedimentação, variações de densidade da mistura e turbulência vertical possam ter interferido nos resultados.

Conclui-se que a calibração individualizada da velocidade média de trânsito e do coeficiente de dispersão é essencial para melhorar a capacidade preditiva dos modelos analíticos e numéricos aplicados ao transporte de sedimentos finos e poluentes em suspensão. Como contribuição ao campo

de pesquisa, o estudo reforça a necessidade de compatibilizar hipóteses teóricas com dados experimentais específicos, especialmente em estudos de dispersão longitudinal em escoamentos com superfície livre. Do ponto de vista aplicado, os resultados oferecem subsídios para a modelagem do deslocamento de partículas e contaminantes em cursos d'água naturais, com implicações relevantes para o monitoramento ambiental, a gestão da qualidade da água e o controle de processos de poluição em sistemas fluviais.

REFERÊNCIAS

BAEK, K.O. (2018). Flowchart on choosing optimal method of observing transverse dispersion coefficient for solute transport in open channel flow. ***Sustainability*** 2018, 10(5), pg.1332; https://doi.org/10.3390/su10051332.

BAEK, K.O.; SEO, I.W.; JEONG, S.J. (2006). Evaluation of dispersion coefficients in meandering channels from transient tracer tests. ***Journal of Hydraulic Engineering***, ASCE, V.132(10), pg. 1021–1032, https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2006)132:10(1021).

CARR, M.L; REHMANN, C.R. (2007). Measuring the dispersion coefficient with acoustic Doppler current profilers. ***Journal of Hydraulic Engineering***, ASCE, V.133(8), pg. 977-982. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2007)133:8(977).

CHIN, D.A. (2013). ***Water-Quality Engineering in Natural Systems:*** *Fate and transport processes in the water environment*, 2nd published. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, USA.

DENG, Z-Q; BENGTSSON, L.; SINGH, V.P.; ADRIAN, D.D. (2002). Longitudinal dispersion coefficient in single-channel streams. ***Journal of Hydraulic Engineering***, ASCE, V.128(10), pg. 901-916, DOI:10.1061/(ASCE)0733-9429(2002)128:10(901).

FISCHER H.B. (1967). The mechanics of dispersion in natural streams. ***Journal of the Hydraulics Division***. Vol.93, nº HY6 (Jun), pp.187-216. https://doi.org/10.1061/JYCEAJ.0001706.

GRAF, W. H. (1971). ***Hydraulics of sediment transport***. McGraw-Hill Book Company. New York, 513p.

GUIMARÃES, M.M. (2006). ***Estudo do movimento de partículas de sedimentos finos nos escoamentos com superfície livre com transferências verticais***. Tese de Doutorado em Ciências em Engenharia Civil/Recursos Hídricos. Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós Graduação e Pesquisa de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro – COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro, 436 p.il.

GUIMARÃES, M.M. (2025). Movimentos unidimensionais em suspensão de sedimentos pelíticos em escoamentos com superfície livre. ***ARACÊ***, *[S. l.]*, v.7, n. 8, p. e7093, 2025. DOI: 10.56238/arev7n8-053. Disponível em: https://periodicos.newsciencepubl.com/arace/article/view/7093. Acesso em: 29 ago. 2025.

GUIMARÃES, M.M.; WILSON-JR., G. (2004). ***Modelo unidimensional para o estudo do movimento de partículas de sedimentos em suspensão nos escoamentos com superfície livre***. In: 6º Encontro Nacional de Engenharia de Sedimentos, CES/ABRH. Vitória-ES: 08 a 10/dezembro/2004.

GUIMARÃES, M.M.; WILSON-JR., G. (2005). ***Movimentos unidimensionais duma suspensão de sedimentos pelíticos em escoamentos com superfície livre***. In: XVI Simpósio Brasileiro de Recursos, João Pessoa-PB: 20 a 24/novembro/2005, ABRH.

GUIMARÃES, M.M.; WILSON-JR., G. (2007). ***Estudos unidimensionais do movimento de partículas de sedimentos finos nos escoamentos com superfície livre***. In: XVII Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos e VIII Simpósio de Hidráulica e Recursos Hídricos dos Países de Língua Oficial Portugues. São Paulo/SP. ABRH - Associação Brasileira de Recursos Hídricos.

GUIMARÃES, M.M.; WILSON-JR., G. (2008). ***Estudios bi-dimensionáis del movimiento de las partículas de sedimentos finos en escurrimientos con superficie libre***. In: XXIII Congreso Latino Americano de Hidráulica, 2008, Cartagena de Índias: IAHR - International Association for Hydro-Environment Engineering and Research.

GUIMARÃES, M.M.; WILSON-JR., G. (2014). ***Movimentos bidimensionais de partículas de sedimentos finos em suspensão nos escoamentos com superfície livre.*** In: XI Encontro Nacional de Engenharia de Sedimentos. Disponível em: https://anais.abrhidro.org.br/job.php?Job=11755. Acesso em: Jun-2025.

ISLAM, M.R.; CHAUDHRY, M.H. (1997). Numerical solution of transport equation for applications in environmental hydraulics and hydrology. ***Journal of Hydrology***. V.191(1-4), pp. 106-121, https://doi.org/10.1016/S0022-1694(96)03077-6.

LIU, H. (1977). Predicting dispersion coefficient of streams. ***Journal of the Environmental Engineering Division***, ASCE, V.103(1), 59-69, https://doi.org/10.1061/JEEGAV.0000605.

NWIDADAH, B.; ADELOYE, O.M. (2020). Curve fitting the hydrodynamic and dispersion characteristics of pollutant released in an inland water system. ***Global Journal of Engineering and Technology Advances***, V.05(02), pg.038–046. https://doi.org/10.30574/gjeta.2020.5.2.0098.

PIOTROWSKI, A.P.; NAPIORKOWSKI, J.J.; ROWINSKI, P.M.; WALLIS, S.G. (2011). Evaluation of temporal concentration profiles for ungauged rivers following pollution incidents. ***Hydrological Sciences Journal***, V.56(5), pg.883-894, https://doi.org/10.1080/02626667.2011.583398.

RUTHERFORD, J.C. (1999). ***River mixing***. John Wiley & Sons Ltda. England. 347 p.

SAYRE, W.W.; CHANG, F.M. (1968). A laboratory investigation of open-channel dispersion processes for dissolved, suspended, and floating dispersants. Transport of Radionuclides by Streams. ***Geological Survey Professional Paper 433-E***. Washington. 71 p.

SHIN, J.; SEO, J.Y.; SEO, I.W. (2020). Longitudinal dispersion coefficient- for mixing in open channel flows with submerged vegetation. ***Ecological Engineering***. 2020, V.145. https://doi.org/10.1016/j.ecoleng.2020.105721.

SINGH, S.K.; BECK, M.B. (2003). Dispersion coefficient of streams from tracer experiment data. ***Journal of Environmental Engineering***, V.29(6), pg. 539-546. https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9372(2003)129:6(539).

TAYLOR, G.I. (1921). ***Diffusion by continuous movements***. London Math. Society Proceeding, Ser. 2, Vol. 20, pp.196-211.

TAYLOR, G.I. (1953). Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube. ***Proceedings of the Royal Society of London***. Vol. 219. Series A, nº 1137, pp.186-203.

WANG, H.; CONG, P.; ZHU, Z.; ZHANG, W.; AI, Y.; HUAI, W. (2022). Analysis of environmental dispersion in wetland flows with floating vegetation islands. ***Journal of Hydrology***, V.606. https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2021.127359.

WANG, H.Q.; LACROIX, M. (1997). Optimal weighting in the finite difference solution of the convection-dispersion equation. ***Journal of Hydrology***, V.200(1-4), pg. 228-242, https://doi.org/10.1016/S0022-1694(97)00020-6.

WILSON-JR, G. (1987). ***Etude du transport et de la dispersion des sédiments en tant que processus aléatoires*.** Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences Physiques. Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 419p.il, Paris, France.

ZENG, Y-H.; HUAI, W.X. (2014). Estimation of longitudinal dispersion coefficient in rivers. ***Journal of Hydro-environment Research***, V.8(1), pg.2-8. https://doi.org/10.1016/j.jher.2013.02.005.

ZOPPOU, C.; KNIGHT, J.H. (1997). Analytical solutions for advection and advection-diffusion equations with spatially variable coefficients. ***Journal of Hydraulic Engineering***, ASCE, V. 123(2), pg. 144-148. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9429(1997)123:2(144).